Série A, N° 4488
N° d'ordre : 5335

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Paul RICHARD

1re THÈSE — **« Possibilité de vérification de la relativité générale à l'aide de satellites artificiels terrestres. »**

2e THÈSE — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 Avril 1965 devant la Commission d'examen.

M. A. LICHNEROWICZ	*Président.*
Mme M.-A. TONNELAT Mlle S. MAVRIDÈS	*Examinateurs.*
M. A. PAPAPETROU	*Invité.*

Ouvrage publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique (France) et de l'Université du Maryland (U. S. A.)

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15e)
1966

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534905_0066

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : **RICHARD**

Prénom : **Jean-Paul**

Date de la soutenance : 27 Avril 1965

Numéro d'ordre : Série A 4488, N° 5335

1

RICHARD (J.-P.). — Possibilité de vérification de la relativité générale à l'aide de satellites artificiels terrestres. — *Paris*, Éditions de la Revue d'Optique, 1966, 71 p., 17 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4488, N° 5335.

2

RICHARD (J.-P.) — Possibilité de vérification de la relativité générale à l'aide de satellites artificiels terrestres. — *Paris*, Éditions de la Revue d'Optique, 1966, 71 p., 17 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4488, N° 5335.

3

RICHARD (J.-P.) — Possibilité de vérification de la relativité générale à l'aide de satellites artificiels terrestres. — *Paris*, Éditions de la Revue d'Optique, 1966, 71 p., 17 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4488, N° 5335.

4

RICHARD (J.-P.) — Possibilité de vérification de la relativité générale à l'aide de satellites artificiels terrestres — *Paris*, Éditions de la Revue d'Optique, 1966, 71 p., 17 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4488, N° 5335.

Série A, N° 4488
N° d'ordre : 5335

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Paul RICHARD

1re THÈSE — **« Possibilité de vérification de la relativité générale à l'aide de satellites artificiels terrestres. »**

2e THÈSE — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 Avril 1965 devant la Commission d'examen.

M. A. LICHNEROWICZ	*Président.*
Mme M.-A. TONNELAT Mlle S. MAVRIDÈS	*Examinateurs.*
M. A. PAPAPETROU	*Invité.*

Ouvrage publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique (France) et de l'Université du Maryland (U. S. A.)

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15e)
1966

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY

BRELOT	T	Analyse supérieure.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
WYART	T	Minéralo. et cristallo.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végé. (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique E. N. S.
CARTAN	T	Mathématiques E. N. S.
LAFFITTE	T	Chimie générale.
N...	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du globe.
Mlle COUSIN	T	Biologie animale S. P. C. N.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
BOCQUET	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique E. N. S.
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie S. P. C. N. et sédiment (Orsay).
GAUTHERET	T	Biologie végétale P. C. B.
LUCAS R.	T	Recherches physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique enseignement.
SOLEILLET	T	Physique P. C. B.
FORTIER	T	Mécanique exp. des fluides.
DRACH	T	Zoologie.
QUENEY	T	Météo. et dynamique atmos.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale S. P. C. N.
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.
DU BREIL	T	Arith. et théorie des nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Géologie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffrac. élec.
WIEMANN	T	Chimie organ. et structu.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théorie physique.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéral. et cristal.
J. P. MATHIEU	T	Physique optique.
COUTEAUX	T	Cytologie.
MAY	T	Zoologie.
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie.
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
GUINIER	T	Physique des solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul dif. et intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (technique aéron.).
NORMANT	T	Synthèse organique.
BENARD	T	Chimie minérale.
BUVAT	T	Botanique E. N. S.
DUGUE	T	Statistiques mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végé. appli.
MARÉCHAL	T	Optique théo. et appli.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physio. de la nutrition.
LELONG	T	Appli. de l'ana. à la géom.
DEVILLERS	T	Anatomie et histo. comp.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique S. P. C. N.
GLANGEAUD	T	Géogra. phys. et géol.
DODEMENT	T	Mathématiques M. G. P.
PISOT	T	Technique math. de la phys.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMANN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Géologie générale.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique M. G. P.
RIZET	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques M. P. C.
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Electrotechn. géné.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY	T	Biologie végétale P. C. B.
PANNETIER	T	Chimie générale.
BRUN	T	Mécanique des fluides I.
LEDERER	T	Chimie biologique (Orsay).
Mme DUBREIL	T	Mathématiques (agréga.).
Mme LELONG	T	Math. II E. N. S.
BELLAIR	T	Géologie S. P. C. N.
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie E. N. S.
MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER	T	Energétique générale.
ROUAULT	T	Electricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER	T	Physiologie comparée.
CAMUS	T	Physio. végé.
CASTAING	T	Physique II thermo. (Orsay).
CURIEN	T	Minéralo. et cristal.
MOYSE	T	Physio. végé. (Orsay).
Mme CHARNIAUX-COTTON	T	Evolution des êtres organisés.
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie quantique.
TEILLAC	T	Physique nucl. et radioactivi. (Orsay).
TONNELAT	T	Bio. physico. chim. (Orsay).
VILLE	T	Econométrie.
WILLEMART	T	Chimie P. C. B.
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches physiques.
GUINOCHET	T	Biolo. végé. S. P. C. N. (Orsay).
ROLLET	T	Chimie minérale.
Mlle JOSIEN	T	Chimie S. P. C. N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T	Electronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique I (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
DENY	T	Mathé. géné. (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
LUCAS	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales (Orsay).
BRICARD	T	Météor. et physique de l'atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psycho. physio.
FRIEDEL	T	Physique des solides (Orsay).
M. JULIA	T	Etudes des moléculaires complexes.

(suite en dernière page)

UNIV. LEIDEN BIBL.

POSSIBILITÉ DE VÉRIFICATION DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE À L'AIDE DE SATELLITES ARTIFICIELS TERRESTRES

PAR

Jean-Paul RICHARD

INTRODUCTION

L'analyse des vérifications actuelles de la relativité générale et de deux autres effets prévus par cette théorie permet de préciser l'intérêt de certaines expériences effectuées à l'aide de satellites artificiels terrestres. Nous examinerons une méthode permettant d'évaluer les possibilités de réaliser ces expériences.

1. **Relativité générale et principe d'équivalence.** — La théorie de la relativité générale est basée sur une équivalence locale des champs de gravitation et d'accélération. Deux types d'expériences confirment ce principe d'équivalence.

1. L'équivalence des champs de gravitation et d'accélération entraîne une identité des masses grave et inerte. Cette identité se traduit expérimentalement de la façon suivante : l'accélération d'une particule d'épreuve dans un champ de gravitation est indépendante de la nature de cette particule. Deux séries de résultats expérimentaux confirment cette loi.

a) D'abord réalisée par Eötvös et ses collaborateurs en 1922, l'expérience d'Eötvös est actuellement reprise par Dicke. Le résultat d'une première série de mesures établit l'identité des masses grave et inerte de deux corps macroscopiques de même vitesse à $\pm 3 \times 10^{-10}$ près.

b) La comparaison des accélérations d'un satellite terrestre et d'un corps au niveau du sol fournit une seconde confirmation de l'identité des masses grave et inerte. En effet, si $\mu = G\,M$ est la masse gravitationnelle terrestre, les mesures de l'accélération g au niveau du sol et du rayon terrestre R_0 permettent de déduire le rapport des masses grave et inerte d'un corps : $m_{1G}/m_{1I} = R_0^2\, g/\mu$. De même, les mesures directes du moyen mouvement n et du demi-grand axe orbital a d'un satellite (Lune ou satellite artificiel terrestre) permettent de calculer ce rapport à l'aide de la troisième loi de Kepler : $m_{2G}/m_{2I} = n^2\, a^3/\mu$. Ces deux rapports sont identiques si $g\, R_0^2/n^2\, a^3 = 1$. L'exactitude de cette relation est vérifiée à la précision relative des mesures de chacune des quantités qui y figurent. Nous obtenons ainsi une vérification de l'identité des masses grave et inerte à $\pm\ 10^{-6}$ près pour des corps dont les vitesses sont inférieures ou égales à $10^{-5}\ c$.

Par leur précision ces deux résultats expérimentaux fournissent la vérification la plus significative de la relativité générale en tant que théorie basée sur le principe d'équivalence.

2. L'observation du décalage des fréquences dans un champ d'accélération fournit la seconde vérification directe de l'équivalence entre champ de gravitation et champ d'accélération. Cet effet n'a pas encore de formulation rigoureuse en relativité générale et les résultats expérimentaux ne sont utilisables que par comparaison aux effets prévus dans un champ de gravitation. (Ces derniers peuvent être traités rigoureusement dans le cadre de la théorie et seront examinés plus loin.)

D'abord suggérées par Cranshaw, les expériences de décalage dans un champ d'accélération utilisent une source de radiation γ (exemple, ^{57}Co) et un analyseur (^{57}Fe) placés sur un disque en rotation rapide. Dans un premier type d'expérience, la source est au centre du disque et l'absorbant est à la périphérie. La différence des potentiels d'accélération entre la source et l'analyseur est maximum. Dans un second type d'expérience, la source et l'analyseur sont à égale distance du centre du disque. La différence des potentiels est nulle.

Dans les deux cas, l'effet qui a été observé est égal à celui que prévoit la théorie pour une même différence des potentiels gravitationnels entre les points où sont placés la source et l'analyseur. La précision des mesures effectuées par Kundig est de 1 % et constitue une vérification significative de la relativité générale.

2. **Relativité générale et équations du champ.** — Les équations du champ de la relativité générale admettent le ds^2 de Schwarzschild comme solution du cas extérieur, pour un champ créé par une masse fixe à symétrie sphérique. De ce ds^2 se déduisent trois effets qui ont été l'objet d'observations.

1. Le premier effet lié au ds^2 de Schwarzschild est un décalage de fréquences des sources situées dans un champ de gravitation central. Il est fonction de la vitesse des sources et de la valeur du potentiel gravitationnel aux points où elles se trouvent.

a) Pound & Rebka ont réalisé une mesure de ce décalage. Dans leur expérience, les sources sont en repos relatif et distantes de 22 m. L'effet dû au champ gravitationnel terrestre est faible et seule la finesse des raies des transitions nucléaires permet actuellement une mesure. Le décalage mis en évidence par effet Mössbauer est $1{,}00 \pm 0{,}01$ fois celui que prévoit la théorie.

b) Dans les autres observations de l'effet de décalage, les sources sont en mouvement relatif. Ces mesures proviennent de l'analyse des raies spectrales du Soleil et des naines blanches et leur précision est faible. Dans le premier cas, la largeur des raies est de 2,5 à 150 fois plus grande que l'effet relativiste. De plus, les raies sont asymétriques et il est nécessaire de construire un modèle théorique qui rende compte de ces asymétries. En tenant compte de ces asymétries, Dicke & Brault ont récemment observé le décalage relativiste de la raie spectrale D_1 avec une incertitude de 5 %. Chez les naines blanches, le décalage gravitationnel est plus important. La détermination des paramètres nécessaires au calcul théorique de sa valeur est cependant plus difficile. La seule mesure significative (Eridanus 40B) révèle la présence d'un effet égal à $1{,}24 \pm 0{,}4$ fois l'effet relativiste.

Ainsi, si le décalage statique dans un champ de gravitation semble bien établi et constitue une vérification de la relativité générale, il n'en est pas de même du décalage de fréquences de sources en mouvement relatif.

2. La déviation des rayons lumineux dans le champ de gravitation d'un astre central se déduit aussi du ds^2 de Schwarzschild. Elle n'est actuellement décelable que par comparaison de deux photographies d'un même groupe d'étoiles, l'une du groupe dans le voisinage apparent du Soleil, l'autre du groupe hors de ce voisinage.

La déformation des plaques photographiques et l'impossibilité de reproduire exactement la géométrie de l'optique utilisée limitent ici la précision des observations. D'après l'ensemble des mesures faites (la dernière au Sahara en 1959), la valeur extrapolée de la déviation au limbe est d'environ 2″ ; elle dépasse de 15 % la valeur théorique. Il est possible de déduire une marge d'erreur de la fluctuation des mesures sans toutefois tenir compte des erreurs systématiques. Ainsi, seul l'ordre de grandeur de l'effet est vérifié. La relation en m/r n'est pas mise en évidence. Cette observation ne peut donc pas constituer une vérification probante du ds^2 de Schwarzschild.

3. Le troisième effet prévu est l'avance du périastre d'une planète ou d'un satellite considérés comme particules d'épreuve du champ de Schwarzschild. Pour déceler cet effet dans le mouvement du périhélie d'une planète, il est nécessaire de corriger les observations des effets dus à la précession de l'axe de rotation terrestre et des perturbations dynamiques dues au champ gravitationnel des autres planètes. Ces perturbations dynamiques peuvent être calculées à partir des données expérimentales sur la variation des autres éléments des orbites planétaires (les mouvements séculaires des nœuds en particulier). On ne peut expliquer les mouvements séculaires des périhélies de Mercure et de la Terre par un aplatissement du Soleil. En effet et c'est le cas pour le mouvement de la Lune et celui des satellites artificiels terrestres, un tel aplatissement de l'astre central provoquerait des mouvements séculaires des nœuds du même ordre que ceux des périastres, mouvements qui n'ont pas été observés. En 1955, Brouwer a fourni des valeurs corrigées de la masse des planètes et de la constante de précession. Duncombe a pu ainsi recalculer les résidus de la théorie classique et préciser la présence des effets relativistes. Pour Mercure, les valeurs théoriques et expérimentales sont de 43,03″ et 43,11 $\pm$ 0,45″ par siècle. Pour la Terre, ces valeurs sont de 3,8″ et 5,0 $\pm$ 1,2″ par siècle.

L'observation du mouvement relativiste du périhélie de Mercure peut difficilement être mise en doute maintenant. De plus, l'effet observé dans le mouvement du périhélie de la Terre a bien l'ordre de grandeur prévu par la théorie. La relation en $1/a$ (a étant le demi-grand axe de l'orbite) du mouvement relativiste du périastre est ainsi mise en évidence et ces observations constituent une vérification très précise de la solution de Schwarzschild et de la relativité générale.

Ainsi, pour ces vérifications expérimentales de la relativité générale, la précision des observations faites est satisfaisante sauf en ce qui concerne la déviation des rayons lumineux et le décalage des fréquences de sources en mouvement relatif dans un champ de gravitation. Ces deux effets pourraient donc utilement faire l'objet de nouvelles expériences.

Il en est de même pour les effets suivants qui n'ont pas encore été mis en évidence expérimentalement.

4. Un moment angulaire subit un mouvement de précession lorsqu'il se déplace dans un champ de Schwarzschild. Nous montrerons que, dans le cas du moment angulaire d'un satellite par rapport au centre de la Terre, ce phénomène se traduit par des mouvements du nœud et de l'inclinaison de l'orbite lorsque cette orbite, entraînée par le mouvement de la Terre, se déplace dans le champ solaire. Schiff a montré que, dans le cas du moment angulaire d'un satellite (ou d'un gyroscope dans un satellite) par rapport à son centre de gravité, ce phénomène se traduit encore par des mouvements de l'axe de rotation du satellite (ou du gyroscope dans le satellite) lorsqu'il se déplace dans le champ terrestre.

5. Enfin, la solution des équations du champ diffère du ds^2 de Schwarzschild si l'on tient compte de la rotation de l'astre central (Lense & Thirring). Les équations du mouvement introduisent alors des mouvements additionnels du périgée et du nœud de l'ellipse newtonienne et une modification du phénomène de précession.

D'après ce rappel de prévisions et de vérifications de la relativité générale, quatre effets pourraient utilement faire l'objet d'expériences : le décalage de fréquences de sources en mouvement relatif (§ 2.*1*), la déviation des rayons lumineux (§ 2.*2*), la précession du moment angulaire (§ 2.*4*), les modifications de ces effets dues à la rotation de l'astre central (§ 2.*5*). La réalisation de ces expériences à l'aide de satellites artificiels terrestres présenterait les avantages suivants :

a) dans les expériences de décalages, il est possible de connaître la fréquence et la stabilité des horloges utilisées ;

b) la précession de l'axe de rotation d'un satellite (ou d'un gyroscope dans un satellite) est environ 300 fois plus grande que celle de l'orbite lunaire ou de l'axe de rotation terrestre ;

c) le mouvement du périgée d'un satellite artificiel terrestre est 50 fois plus grand que celui du périhélie de Mercure et il est relativement facile d'accumuler en un temps court des données très précises sur le mouvement d'un tel satellite ;

d) enfin, dans chacun des cas, le choix des éléments de l'orbite initiale du satellite permet de réaliser plusieurs expériences et de mettre en évidence le lien entre les effets et certains paramètres.

Le satellite peut ainsi se révéler un moyen d'investigation précieux et, pour cette raison, il est intéressant d'étudier la possibilité de réaliser ces expériences. Notons toutefois que la mesure de la déviation des rayons lumineux pose surtout des difficultés d'ordre technique. Pour cette raison, nous limiterons cette étude aux possibilités d'observation à l'aide de satellite des trois autres effets (§ 2.*1*, *4* et *5*). L'examen des procédés de résolution des problèmes posés en relativité générale nous suggérera maintenant une méthode permettant d'évaluer les possibilités de réalisations expérimentales.

3. **Prévisions et possibilités d'observation.** — Une vérification de la relativité générale nécessite, en principe, la résolution d'un problème donné dans le cadre de cette théorie et la comparaison de la solution aux observations expérimentales. Dans la majorité des cas pratiques, cependant, nous ne savons pas résoudre les équations de la relativité générale. Seules les solutions de quelques problèmes très

simples sont connues. Pour cette raison la méthode suivante est habituellement utilisée : on résout d'abord un problème complexe par les méthodes classiques et on ajoute à cette solution classique les effets relativistes. Les effets relativistes se déduisent de la solution, dans le cadre de la relativité générale, d'un problème simple aussi proche que possible du problème réel.

Cette méthode est valable en particulier dans les problèmes dont la solution classique s'obtient par la méthode de perturbation. La solution classique se présente alors sous forme d'une trajectoire dont les paramètres c_i, constants dans le problème non perturbé, varient au cours du temps. Nous dirons que ces variations sont des « perturbations d'origine classique » et nous les noterons $(Dc_i)_c$.

A la solution classique nous ajoutons les effets relativistes du problème non perturbé. Il est avantageux de mettre aussi ces effets sous forme de variations des éléments de la trajectoire intermédiaire, solution du problème classique non perturbé. Nous appellerons ces variations « perturbations d'origine relativiste » et nous les noterons $(Dc_i)_r$.

Ainsi les prévisions de la théorie relativiste nous seront données sous forme de variations des éléments d'une trajectoire intermédiaire par simple addition des effets classiques et relativistes : $(Dc_i)_t = (Dc_i)_r + (Dc_i)_c$. Afin de vérifier la théorie, les observations seront aussi mises sous cette forme $(Dc_i)_o$. Dans ces conditions, nous pouvons dire qu'un effet relativiste $(Dc_i)_{rk}$ (k pour effet de Schwarzschild, effet de précession, etc.) a été observé avec une précision de x % si

$$10^2 \left[|(Dc_i)_t - (Dc_i)_o| + |E(Dc_i)_t| + |E(Dc_i)_o|\right]/(Dc_i)_{rk} \leqq x ,$$

où le numérateur du premier membre est l'écart possible entre la théorie et l'observation et où $(Dc_i)_t - (Dc_i)_o$ est l'écart entre l'effet prévu et l'effet observé, $E(Dc_i)_t$ est l'erreur probable sur les prévisions théoriques, $E(Dc_i)_o$ est l'erreur probable sur les observations expérimentales.

Dans le cas le plus favorable où les observations concordent avec les valeurs théoriques, soit $(Dc_i)_t - (Dc_i)_o = 0$, la relation précédente admet les conditions nécessaires :

$$(1) \qquad 10^2 \, E(Dc_i)_t/(Dc_i)_{rk} \leqq x ,$$

$$(2) \qquad 10^2 \, E(Dc_i)_o/(Dc_i)_{rk} \leqq x .$$

Ainsi, pour qu'un effet relativiste puisse être observé avec une incertitude de x %, il faut que la précision des prévisions théoriques et des observations expérimentales soit telle que les inégalités (1) et (2) soient satisfaites.

Dans ce travail, nous envisagerons trois types d'expériences susceptibles de mettre en évidence des effets relativistes. Le premier porte sur le mouvement orbital d'un satellite terrestre (§ 2.*4* et *5*), le second sur les mouvements de l'axe de rotation du satellite sur lui-même (§ 2.*4* et *5*). Le troisième consiste en des mesures de décalage de fréquence d'horloges dont l'une est dans un satellite (§ 2.*1*). Nous rappellerons ou calculerons (selon les cas) la valeur des « perturbations classiques et relativistes » pour expliciter les conditions (1) et (2). Nous obtiendrons, dans chacun des cas, un ensemble de conditions permettant de définir les possibilités d'observation d'effets relativistes compte tenu de la précision des prévisions et des mesures expérimentales.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DU MOUVEMENT ORBITAL D'UN SATELLITE ARTIFICIEL TERRESTRE

Dès 1954, La Paz [41] a suggéré l'emploi de satellites artificiels terrestres pour mettre en évidence l'avance relativiste du périgée dans le champ de Schwarzschild de la Terre. Il a défini une quantité α proportionnelle aux possibilités d'observation de l'effet relativiste et l'a exprimée en fonction de la grandeur de cet effet, de la différence des vitesses du satellite à l'apogée et au périgée, de la position de l'orbite par rapport au Soleil et à la Terre et du rapport des périodes de visibilité et de révolution du satellite. La valeur de α est de 3,4″/siècle pour Mercure et peut atteindre 480″/siècle pour un satellite terrestre.

La définition de la quantité α repose sur l'hypothèse suivante : d'un point de vue classique, la force agissant sur le satellite dérive d'un potentiel central ; or, cette condition n'est pas réalisée en pratique et il est nécessaire de tenir compte des perturbations d'origine classique.

Ginzburg [21] a aussi suggéré l'emploi de satellites pour mettre en évidence les mouvements relativistes du périgée et du nœud dus à la rotation de l'astre central, sans discuter les possibilités d'observer cet effet.

Dans la première partie de ce travail, nous examinerons les possibilités d'observer les différents effets orbitaux relativistes compte tenu de la présence des perturbations classiques. Nous procéderons de la façon suivante :

a) nous montrerons d'abord que pour expliciter les conditions (1) et (2), il nous suffira de connaître les seules perturbations séculaires du premier ordre (définies au § I.2.*I*) de la trajectoire intermédiaire choisie, l'ellipse ;

b) le chapitre II comporte un rappel de théorie des perturbations nécessaire au calcul des effets du premier ordre ;

c) le chapitre III est consacré au calcul des effets du premier ordre (classiques et relativistes) ; nous montrerons en particulier que des mouvements relativistes du nœud et de l'inclinaison dus au champ solaire s'ajoutent aux effets qui signalent La Paz et Ginzburg ;

d) dans le chapitre IV, nous expliciterons les conditions (1) et (2) pour discuter, comme application, des possibilités actuelles d'observation des effets relativistes.

I. Conditions d'observation et effets du premier ordre

Plaçons-nous dans le repère $oxyz$ ainsi défini : oz coïncide avec l'axe instantané de rotation de la Terre sur elle-même, ox est à l'intersection des plans instantanés de l'écliptique et de l'équateur, oy est normal aux deux axes précédents. Les trois axes forment un système droit. D'un point de vue purement classique, le mouvement d'un satellite terrestre dans ce repère est différent de celui d'une particule dans un champ central pour plusieurs raisons. La Terre n'est pas parfaitement sphérique et homogène ; elle est aplatie et l'équateur est légèrement elliptique de sorte que son champ gravitationnel n'est pas exactement en r^{-2}. A ce champ gra-

vitationnel s'ajoutent ceux de la Lune, du Soleil et des planètes. Un satellite est soumis à la résistance de l'air ambiant, à la pression du rayonnement solaire, aux chocs de météorites et de particules dans les ceintures de radiations, à l'influence du champ électromagnétique terrestre. Enfin, le repère $oxyz$ n'est pas newtonien. Il est entraîné par le mouvement de précession et de nutation de l'axe de rotation terrestre et se déplace par rapport aux étoiles.

1. **Solution théorique.** — Ainsi, les équations classiques du mouvement d'un satellite terrestre sont de la forme

$$\ddot{x}_i = -\mu x_i r^{-3} + X_{ic}\,, \tag{1-1}$$

où :

x_i ($i = 1, 2$ et 3) sont les coordonnées du satellite (le point indique la dérivée par rapport au temps) ;

$\mu = G M$, où G est la constante de gravitation et M la masse de la Terre ;

r est la distance du satellite au centre de gravité de la Terre ;

X_{ic} est la résultante des accélérations diverses qui, d'un point de vue purement classique, s'ajoutent au champ central $-\mu r^{-2}$.

La retranscription vectorielle des équations du mouvement de la relativité générale introduit au second membre des équations (1-1) des termes X_{ir} que nous pouvons interpréter comme des forces d'origine relativiste. La forme des équations est alors la suivante :

$$\ddot{x}_i = -\mu x_i r^{-3} + X_{ic} + X_{ir}\,. \tag{1-2}$$

Les accélérations X_{ic} et X_{ir} sont beaucoup plus faibles (au moins 10^3 fois) que la composante centrale du potentiel terrestre, de sorte qu'il est naturel de chercher la solution de (1-2) par une méthode de perturbation en précisant d'abord les équations du problème non perturbé.

La solution des équations $\ddot{x}_i = -\mu x_i r^{-3}$ est bien connue : c'est l'ellipse dont l'un des foyers est au centre de gravité de la Terre. Certains auteurs (Garfinkel [19], Sterne [60], Vinti [65]) ont calculé une solution exacte des équations $\ddot{x}_i = -\mu x_i r^{-3} + X_{icz}$, où l'accélération X_{icz} rend compte partiellement de la principale composante de l'aplatissement terrestre. Cette solution dépend des para-

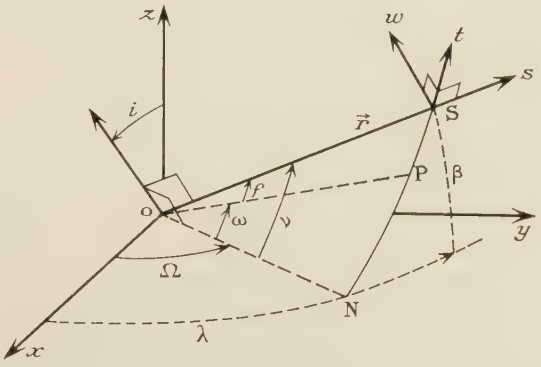


FIG. 1. — o, centre de gravité de la Terre ; ox, intersection des plans de l'équateur et de l'écliptique ; oz, axe de rotation terrestre ; oxy, plan de l'équateur ; r, distance du centre de la Terre au satellite S ; β, latitude ; λ, longitude ; f, anomalie vraie du satellite ; i, inclinaison de l'orbite ; ω, argument du périgée P ; Ω, longitude du nœud ascendant N ; Ss, axe selon oS ; St, axe normal à oS, dans le plan orbital et dans la direction de f croissant ; Sw, axe normal au plan orbital et dans la direction du moment angulaire de S par rapport à o.

mètres de l'aplatissement terrestre et n'est pas parfaitement définie pour cette raison.

Nous choisirons l'ellipse comme trajectoire intermédiaire car elle nous fournira un système de référence précis pour l'étude des perturbations classiques et relativistes. La solution du problème perturbé (1-2) se présentera sous forme de perturbations de cette trajectoire intermédiaire. Nous exprimerons ces perturbations sous forme de variations des éléments elliptiques suivants (fig. 1) : a, e, i, demi-grand axe, excentricité et inclinaison de l'orbite ; Ω, longitude du nœud ascendant N ; ω, argument du périgée P ($\varpi = \Omega + \omega$).

Nous allons maintenant préciser quels termes de la solution du problème perturbé il serait intéressant de calculer et de comparer aux observations en examinant la forme sous laquelle se présentent les observations expérimentales.

2. **Possibilité d'observations expérimentales.** — Si le problème physique était purement newtonien, il serait possible d'exprimer la valeur observée de l'un des éléments elliptiques sous forme d'un développement en série de Fourier auquel s'ajouterait un terme linéaire par rapport au temps. Pour rendre compte des effets dus à la résistance de l'air, à la pression du rayonnement solaire, etc., il est nécessaire d'ajouter des termes polynomiaux, exponentiels et hyperboliques (Veis [64]) soit

$$(1\text{-}3) \qquad (c_i)_o \simeq \sum_j \Big\{ T_{ij}\,(t-t_0)^j + S_{0ij} \sin\big[S_{1ij} + S_{2ij}\,(t-t_0)\big] \times \\ \times\, E_{0ij} \exp\big[E_{1ij}\,(t-t_0)\big] + H_{0ij}\,(H_{1ij} - t)^{H_{2ij}} \Big\},$$

où $(c_i)_o$ représente la valeur observée de l'un des éléments elliptiques, T, S, E et H sont des constantes déterminées par l'observation.

La valeur du demi-grand axe se déduit de celle du moyen mouvement angulaire n du satellite à partir de la relation (Brouwer [3])

$$(a/R_0)^{3/2} = 17{,}043\,37\; n^{-1},$$

où R_0 est la moyenne des valeurs extrêmes du rayon équatorial terrestre. La valeur des autres éléments est déterminée essentiellement à partir d'observations directionnelles.

Parmi les coefficients du développement (1-3), T_{i1} est celui qui est déterminé avec la meilleure précision relative. C'est le coefficient du terme séculaire (linéaire en t). Pour cette raison, nous devons d'abord, comme on le fait pour les planètes, chercher la présence d'effets relativistes dans les mouvements séculaires de l'orbite d'un satellite en comparant les valeurs expérimentales et théoriques de T_{i1}. Examinons quelle forme prennent alors les conditions (1) et (2).

1. Condition (1). — Le calcul théorique de la variation des éléments elliptiques se fait par une méthode de perturbation et par approximations successives. Le terme séculaire de la variation de l'un des éléments $\dot{c}_i$ peut se mettre sous la forme d'un développement en série suivant les paramètres petits p_n, caractéristiques de chacun des facteurs de perturbation :

$$(1\text{-}4) \qquad \bar{\dot{c}}_i = \sum_l (\bar{\dot{c}}_i)_l + \sum_{lm} (\dot{c}_i)_{lm} + \ldots$$

Dans les termes du premier ordre $(\bar{\dot{c}})_l$ (un seul indice) n'apparaît qu'un seul paramètre p_n et à la puissance 1.

L'utilisation du développement complet (1-4) et des valeurs précises des paramètres et des éléments orbitaux y figurant permettrait de calculer exactement les prévisions théoriques de la relativité générale et de satisfaire ainsi la condition (1). Cependant, les prévisions théoriques sont généralement entachées d'erreurs diverses.

En pratique, le développement (1-4) est limité de plusieurs façons. D'abord, il s'obtient par simple addition des effets classiques et relativistes. Les termes produits classiques-relativistes sont négligés. De plus, les développements utilisés pour l'expression individuelle des effets classiques ou relativistes sont eux-mêmes limités à un certain ordre de paramètres petits. Nous admettrons cependant dans cette discussion que les développements théoriques sont suffisants pour négliger ce type d'erreur (intégration analytique ou numérique).

Les paramètres p_n et les éléments orbitaux c_n du développement (1-4) nous sont donnés par l'observation avec une certaine marge d'erreur probable $[E(p_n), E(c_n)]$ qui limite également la précision des prévisions théoriques. Nous évaluerons l'erreur probable sur ces prévisions $E(\bar{c}_i)_t$ à l'aide du développement (1-4) limité aux seuls termes du premier ordre $(\bar{c}_i)_k$. Ce sont d'abord les effets séculaires de l'aplatissement terrestre calculés en négligeant les autres facteurs de perturbation. Ce sont ensuite les effets séculaires des autres facteurs de perturbation (moins importants), calculés en tenant compte des variations principales de l'orbite : les mouvements séculaires du périgée et du nœud dus à l'aplatissement terrestre. Par dérivation du développement limité, nous obtenons

$$(1\text{-}5) \qquad E(\bar{c}_i)_t \simeq \sum_{kn} \left[\partial(\bar{c}_i)_k/\partial c_n\right] E(c_n) + \sum_{km} \left[\partial(\bar{c}_i)_k/\partial p_m\right] E(p_m) .$$

Les termes d'ordre supérieur du développement (1-4) que nous avons négligés font intervenir les mêmes constantes et paramètres que les termes du premier ordre conservés. Ils peuvent ainsi être calculés avec une même précision relative et, parce que plus petits, sont affectés d'une marge d'erreur absolue plus faible. Ainsi, pour une simple évaluation de l'erreur probable, la relation (1-5) est suffisante et la condition (1) admet les conditions nécessaires :

$$(1') \qquad \begin{aligned} \sum_{k} \left[\partial(\bar{c}_i)_k/\partial c_n\right] E(c_n) &\leqq x\, 10^{-2}\, (\bar{c}_i)_{rk} , \\ \left[\partial(\bar{c}_i)_m/\partial p_m\right] E(p_m) &\leqq x\, 10^{-2}\, (\bar{c}_i)_{rk} , \end{aligned}$$

où $(\bar{c}_i)_m$ est l'effet séculaire du premier ordre fonction du paramètre p_m.

2. *Condition* (2). — La condition (2) reste ici la même sauf qu'elle ne s'applique plus qu'à la mesure des variations séculaires des éléments :

$$(2') \qquad E(\bar{c}_i)_0 \leqq x\, 10^{-2}\, (\bar{c}_i)_{rk} .$$

Nous allons maintenant rappeler les principes de la méthode de variation des constantes. Elle permet de calculer les termes séculaires du premier ordre qui interviennent dans la condition (1).

II. Rappel de théorie des perturbations

Nous admettons ici que dans le repère $oxyz$, l'accélération perturbatrice qui s'ajoute à la quantité $\mu x_i r^{-3}$ découle du potentiel R. Les équations du mouvement

s'écrivent alors

$$\ddot{x}_i = -\mu x_i r^{-3} + \partial_i R \,, \tag{1-6}$$

où ∂_i indique la dérivée partielle par rapport à x_i.

1. **Variation des paramètres généraux.** — Les équations (1-6) admettent pour $R = 0$ une solution exacte que nous écrirons

$$x_i = x_i(c_k, t) \,, \tag{1-7}$$

où les quantités c_k sont six constantes d'intégration.

Dans la méthode de variation des constantes, les quantités c_k sont considérées comme variables. Ceci permet de conserver la forme de la solution (1-7) pour le problème perturbé. La double dérivation de (1-7) et l'introduction des dérivées obtenues dans (1-6) donnent un système de trois équations à six inconnues. Pour que la solution soit unique, il est nécessaire d'imposer trois conditions. Il est avantageux de choisir les conditions suivantes [les quantités x_i et $\dot{x}_i$ désignent maintenant les fonctions $x_i(c_k, t)$ et $\dot{x}_i(c_k, t)$] :

$$\sum_k (\partial x_i/\partial c_k)\, \dot{c}_k = 0 \,, \tag{1-8}$$

car la valeur des vitesses déduites de (1-7) se réduit alors au seul terme $\dot{x}_i = \partial_t x_i$ et les équations (1-6) s'écrivent

$$\sum_k (\partial \dot{x}_i/\partial c_k)\, \dot{c}_k = \partial_i R \,. \tag{1-9}$$

Il est plus commode de mettre sous une autre forme l'ensemble des conditions (1-8) et des équations (1-9). Multipliant les premières par $-\partial \dot{x}_i/\partial c_j$ et les secondes par $\partial x_i/\partial c_r$ et additionnant, il vient

$$\sum_{k=1}^{6} [c_j, c_k]\, \dot{c}_k = \partial R/\partial c_j \,, \tag{1-10}$$

où le crochet de Lagrange a pour valeur

$$[c_j, c_k] = \sum_{i=1}^{3} \left[(\partial x_i/\partial c_j)(\partial \dot{x}_i/\partial c_k) - (\partial \dot{x}_i/\partial c_j)(\partial x_i/\partial c_k) \right] . \tag{1-11}$$

Ainsi, il est possible de choisir un certain groupe d'éléments pour caractériser l'ellipse décrite (1-7) et d'en étudier la variation à l'aide des équations (1-10).

2. **Variation des éléments elliptiques.** — L'expression des variables x, y et z en fonction des éléments elliptiques a, e, i, Ω, ω et l, l'anomalie moyenne, est la suivante :

$$\begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos\nu - \sin\Omega\cos i\sin\nu) \,, \\ y = r(\sin\Omega\cos\nu + \cos\Omega\cos i\sin\nu) \,, \\ z = r\sin i\sin\nu \,, \end{cases} \tag{1-12}$$

où $\nu = \omega + f$, $r = p(1 + e\cos f)^{-1}$. La valeur de l'anomalie vraie f se déduit des relations

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\frac{u}{2} \,, \qquad u - e\sin u = l \,, \tag{1-13}$$

où $p = a(1 - e^2)$ et u est l'anomalie excentrique.

Les variables x, y et z (1-12) sont solutions des équations du mouvement du problème non perturbé si $\dot{l} = n = \sqrt{\mu/a^3}$.

Le calcul des crochets de Lagrange (1-11) et l'introduction de leur valeur dans les équations du mouvement (1-10) permettent de calculer la variation des éléments elliptiques en fonction du potentiel perturbateur R. La condition (1-8) définit alors les éléments osculateurs à l'instant t. Ces éléments sont ceux de l'orbite fixe sur laquelle évoluerait le satellite si toute perturbation disparaissait à cet instant.

Il nous sera plus utile de connaître la variation des éléments elliptiques en fonction de l'accélération perturbatrice. Ces équations se déduisent encore de (1-10) en admettant que, à un instant donné, l'accélération découle du potentiel R.

L'accélération sera décomposée suivant trois axes perpendiculaires s, t et w (fig. 1) tels que S soit la composante dans la direction positive du rayon vecteur allant du centre de la Terre au satellite, T soit la composante normale à ce rayon vecteur, dans le plan de l'orbite et dans la direction de f croissant, W soit la composante normale au plan de l'orbite et dans la direction du moment angulaire du satellite autour de la Terre.

Les équations aux variations des éléments elliptiques s'écrivent

$$
(1\text{-}14)\quad
\begin{cases}
\dot{a} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[S\, e \sin f + \dfrac{T\, a\,(1-e^2)}{r}\right], \\
\dot{e} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{n\, a}\left\{ S \sin f + \dfrac{T}{e}\left[\dfrac{a\,(1-e^2)}{r} - \dfrac{r}{a}\right]\right\}, \\
\dot{i} = W\, r \cos(\omega + f)/n\, a^2 \sqrt{1-e^2}, \\
\dot{\Omega} = W\, r \sin(\omega + f)/\sin i\, n\, a^2 \sqrt{1-e^2}, \\
\dot{\omega} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\, n\, a}\left[-S\cos f + T\left(1 + \dfrac{r}{p}\right)\sin f\right] - \dfrac{W\, r \operatorname{cotg} i \sin \nu}{n\, a^2 \sqrt{1-e^2}}, \\
\dot{l} = n + \dfrac{1}{n\, a}\left\{ S\left[\cos f \dfrac{1-e^2}{e} - \dfrac{2\, r}{a}\right] - T\,\dfrac{1-e^2}{e}\left(1 + \dfrac{r}{p}\right)\sin f\right\}.
\end{cases}
$$

Les relations (1-14) permettent un calcul direct de la variation des éléments elliptiques. Dans certains cas cependant, il est avantageux d'utiliser les éléments de Delaunay. Le système d'équations (1-10) prend alors une forme canonique et admet une résolution par la méthode des transformations canoniques successives. La variation des éléments elliptiques se déduit ensuite de la variation des éléments de Delaunay.

3. **Variation des éléments de Delaunay.** — Les éléments de Delaunay sont définis en fonction des éléments elliptiques par les relations suivantes :

$$
(1\text{-}15)\quad
\begin{cases}
L = \sqrt{\mu\, a}, & l = l, \\
G = \sqrt{\mu\, a\,(1-e^2)}, & g = \omega, \\
H = G\cos i, & h = \Omega.
\end{cases}
$$

L'expression des coordonnées x, y et z en fonction de ces éléments à partir de (1-12) permet le calcul des crochets de Legendre et des équations aux variations suivantes :

$$\text{(1-16)} \qquad \begin{cases} \dot{L} = \partial F/\partial l\ , & \dot{l} = -\,\partial F/\partial L\ , \\ \dot{G} = \partial F/\partial g\ , & \dot{g} = -\,\partial F/\partial G\ , \\ \dot{H} = \partial F/\partial h\ , & \dot{h} = -\,\partial F/\partial H\ , \end{cases}$$

où $F = (\mu^2/2\,L^2) + R$; R est toujours le potentiel perturbateur qui s'ajoute au potentiel central $\mu\, r^{-2}$.

Nous pourrons déduire des solutions approchées des équations aux variations (1-14) ou (1-16) et pour chacun des facteurs de perturbation la valeur des effets du premier ordre qui apparaissent dans la condition (1).

III. Perturbations du mouvement elliptique stable

Nous examinerons, dans ce troisième chapitre, les diverses perturbations du mouvement elliptique stable dues aux différents facteurs présents.

Plusieurs auteurs ont déterminé une solution des équations aux variations pour certains facteurs de perturbation. Dans les cas où cette solution est suffisamment générale, nous la retiendrons. Dans les autres cas, nous intégrerons les équations aux variations du problème considéré.

Nous évaluerons encore les effets d'autres facteurs de perturbation moins importants que les précédents, mais susceptibles d'être plus grands que les effets relativistes et d'en empêcher ainsi l'observation.

Pour chacun des facteurs de perturbation nous pourrons déduire une expression approchée des effets du premier ordre et des coefficients des termes séculaires.

Nous donnerons enfin, dans chacun des cas, un ordre de grandeur numérique des effets.

1. **Aplatissement terrestre.** — L'étude du potentiel d'un corps solide de forme et de densité irrégulières en un point peu éloigné par rapport aux dimensions de ce corps suggère, pour l'expression du potentiel terrestre, le développement en harmoniques sphériques suivant :

$$\text{(1-17)} \qquad U = \frac{\mu}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} R_{nm}\ ,$$

avec $R_{nm} = (\mu/r)\ J_{nm}\ r^{-n}\ P_{nm}(\sin\beta)\ \cos m\,(\lambda - \lambda_{nm})$, où P_{nm} est la fonction associée de Legendre, λ_{nm} est l'origine de l'harmonique P_{nm}. Dans un repère lié à la Terre, cette quantité est fixe et choisie de telle façon que J_{nm} soit positif. J_{nm} est le coefficient de l'harmonique considéré ; il est déterminé par l'expérience et a les dimensions de la puissance n d'une longueur (dans un système où $R_0 = 1$: $J_{20} \simeq 10^{-3}$; pour n et m différents de 2 et de 0, $J_{nm} \simeq 10^{-6}$).

Les coefficients J_{nm} sont petits. Pour cette raison, nous pourrions considérer séparément l'influence de chacun des harmoniques R_{nm}. Nous ne le ferons pas mais, comme c'est l'habitude, nous étudierons séparément les effets dus à l'aplatissement de la Terre et ceux dus à l'ellipticité de son équateur.

Le potentiel perturbateur décrivant l'aplatissement de la Terre se réduit aux seuls harmoniques zonaux :

$$\text{(1-18)} \qquad R_z = \sum_{n=2}^{\infty} R_{n0}$$

et les effets de ce potentiel sur le mouvement d'un satellite sont bien mis en évidence dans la solution obtenue par la méthode des transformations canoniques successives. Nous rappellerons d'abord les principes de cette méthode et la valeur des effets du premier ordre qui apparaissent dans la solution de Brouwer. Nous donnerons enfin un ordre de grandeur numérique de ces perturbations dues à l'aplatissement terrestre.

1. Solution. — Brouwer [3] a donné une solution valable au deuxième ordre en J_{20} et compte tenu des cinq premiers harmoniques zonaux en adaptant au problème une méthode introduite par von Zeipel [68]. Kosai [37] a étendu cette solution aux effets des trois harmoniques suivants et Giagaglia [20] aux effets des harmoniques R_{90} à $R_{12,0}$. Rappelons brièvement les principes de la méthode utilisée.

Au départ, les équations du mouvement sont les suivantes [équations (1-16)] :

$$\dot{L}_i = \partial F/\partial l_i\,, \qquad \dot{l}_i = -\,\partial F/\partial L_i\,, \tag{1-19}$$

où $L_1 = L$, $L_2 = G$, $L_3 = H$, $l_1 = l$, $l_2 = g$ et $l_3 = h$. La valeur de l'hamiltonien F est

$$F = (\mu^2/2\,L_1^2) + \sum_{n-2}^{\infty} R_{n0} = F(L_1, L_2, L_3, l_1, l_2)\,.$$

La longitude n'apparaît pas dans l'expression des harmoniques zonaux. Pour cette raison, F est indépendant de $l_3 = h = \Omega$.

La solution du système (1-19) s'obtient au moyen de deux transformations canoniques successives. Ces transformations conservent la forme canonique des équations et la valeur de l'hamiltonien. Elles sont engendrées par les fonctions S^* et S^{**} telles que les hamiltoniens correspondants soient respectivement indépendants de l_1 et l_3 et de l_1, l_2 et l_3, soit

$$\begin{aligned} F^* &= F\big[L_i(L_i^*, l_i^*)\,,\ l_i(L_i^*, l_i^*)\big] = F^*(L_1^*, L_2^*, L_3^*, l_2^*)\,, \\ F^{**} &= F^*\big[L_i^*(L_i^{**}, l_i^{**})\,,\ l_i^*(L_i^{**}, l_i^{**})\big] = F^{**}(L_1^{**}, L_2^{**}, L_3^{**})\,. \end{aligned} \tag{1-20}$$

Les L_i^{**} et les l_i^{**} obéissent à des équations canoniques de la forme (1-19). F^{**} est indépendant des l_i^{**}, ainsi les L_i^{**} sont des constantes et les l_i^{**} sont des fonctions linéaires du temps.

Dans la méthode de von Zeipel, les fonctions génératrices S^* et S^{**} sont développées en fonction d'un paramètre petit (J_{20} dans la solution de Brouwer) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S^* &= \sum_{i=1}^{3} L_i^*\, l_i \;+ S_1^*(L_1^*, L_2^*, L_3, l_1, l_2) + \dots\,, \\ S^{**} &= \sum_{i=1}^{3} L_i^{**}\, l_i^* + S_1^{**}(L_1^{**}, L_2^{**}, L_3^{**}, l_2^*) + \dots \end{aligned} \tag{1-21}$$

Les fonctions S^* et S^{**} sont déterminées par les conditions (1-20) et les relations de passage

$$\begin{aligned} L_i &= \partial S^*/\partial l_i\,, \qquad & l_j^* &= \partial S^*/\partial L_j^*\,, \\ L_i^* &= \partial S^{**}/\partial l_i^*\,, \qquad & l_j^{**} &= \partial S^{**}/\partial L_j^{**} \end{aligned} \tag{1-22}$$

permettent d'obtenir la solution approchée sous la forme suivante :

$$L_i = \big[\partial S_1^*/\partial l_i(L_1^*, L_2^*, L_3^*, l_1, l_2)\big] + \big[\partial S_1^{**}/\partial l_i^*(L_1^{**}, L_2^{**}, L_3^{**}, l_2^*)\big] + L_{i0}^{**}\,.$$

(1-23) $$l_i = -\left[\partial S_1^*/\partial L_i^*(L_1^*, L_2^*, L_3^*, l_1, l_2)\right] -$$
$$-\left[\partial S_1^{**}/\partial L_i^{**}(L_1^{**}, L_2^{**}, L_3^{**}, l_2^*)\right] - t\left[\partial F^{**}/\partial L_i^{**}(L_1^{**}, L_2^{**}, L_3^{**})\right] + l_{i0}^{**} .$$

Ainsi sont bien mis en évidence les termes de courte période (fonctions de l'anomalie moyenne $l = l_1 \simeq l_1^*$ dont la période est de l'ordre de 1 h), les termes de longue période (fonctions de l'argument du périgée $\omega = l_2 \simeq l_2^*$ dont la période est de l'ordre de 1 mois) et les termes séculaires, fonctions linéaires du temps. Les quantités L_{i0}^{**} et l_{i0}^{**} sont les constantes d'intégration du mouvement.

2. Expression approchée des effets du premier ordre. — Nous n'écrirons pas ici le détail des solutions signalées. Il nous suffira de donner l'amplitude des perturbations de courte période A_{zc} et de longue période A_{zl} et la valeur exacte au premier ordre en J_{20} des perturbations séculaires $(\dot{c}_i)_z$ en retenant les termes correspondants de la solution de Brouwer, soit

(1-24) $$A_{zc}\, a \simeq A_{zc}\, e \simeq (2/\sin 2\, i)\, A_{zc}\, i$$
$$\simeq e\, A_{zc}\, \omega \simeq \cos^{-1} i\, A_{zc}\, \Omega \simeq J_{20}\, p^{-2} ,$$
$$A_{zl}\, a = 0 ,$$

(1-25) $$A_{zl}\, e \simeq (1/e)\, A_{zl}\, i \simeq e\, A_{zl}\, \omega$$
$$\simeq (1/e)\, A_{zl}\, \Omega \simeq e\, J_{20}\, p^{-2} + (J_{30}/J_{20}\, p) ,$$

(1-26) $$\dot{a}_z = \dot{e}_z = \dot{i}_z = 0 , \qquad \dot{\bar{\omega}}_z = J_z , \qquad \dot{\bar{\Omega}}_z = K_z ,$$

avec $J_z = n\,(1 - 5\cos^2 i)\,(3\, J_{20}/4\, p^2)$, $K_z = n \cos i\,(3\, J_{20}/2\, p^2)$.

La solution de Brouwer n'est pas valable dans le cas de l'inclinaison critique $1 - 5\cos^2 i = 0$ ($i = 63^\circ\, 26'$). Pour cette valeur, les équations différentielles pour S^* déduites des conditions (1-20) et du développement (1-21) de S^* comportent un dénominateur nul. Une solution valable dans ce cas peut être obtenue par un développement de S^* en fonction de $\sqrt{J_{20}}$ (Hori [26]). Ces résultats ne nous seront pas utiles ici. Signalons cependant que, pour l'inclinaison critique, le mouvement du périgée présente les propriétés suivantes : il possède une position d'équilibre stable ($\omega = 90^\circ$), deux positions d'équilibre instable ($\omega = 0^\circ$ et 180°) et, pour les positions intermédiaires, il oscille autour de la position d'équilibre stable. A la limite, ces oscillations ont une période infinie et le périgée se rapproche asymptotiquement de l'un des nœuds.

3. Valeur des paramètres. — La valeur des coefficients J_{n0} d'indice pair est déterminée par l'observation des mouvements séculaires du nœud et du périgée (1-26). La valeur des coefficients d'indice impair est déterminée par l'observation des variations de longue période de l'inclinaison et de l'excentricité (1-25).

Plusieurs auteurs (Kosai [38], Smith [59] et King Hele & *al.* [34]) ont donné des valeurs expérimentales de ces quantités mais les écarts entre les valeurs sont incompatibles avec les marges d'erreur données. L'examen des diverses valeurs qu'obtiennent King Hele & *al.* en tenant compte de trois, quatre ou six harmoniques indique que là n'est pas la cause des incompatibilités. Kaula [33] cite cependant diverses causes d'ordre expérimental qui peuvent expliquer des désaccords. Nous retiendrons les valeurs que donne Kaula en y ajoutant l'ordre de

grandeur des autres coefficients qui ont déjà fait l'objet d'une mesure (en unité $10^{-6}\,R_0^n$) :

$$J_{2,0} = -1\,082{,}3 \pm 0{,}2,\ J_{4,0} = 1{,}8 \pm 0{,}2,\ J_{6,0} = -0{,}5 \pm 0{,}2\,,$$
$$J_{3,0} = 2{,}3 \pm 0{,}1,\ J_{5,0} = 0{,}3 \pm 0{,}2,\ J_{7,0} \simeq J_{8,0} \simeq J_{10,0} \simeq J_{12,0} \simeq 10^{-7}\,.$$

4. Conclusion. — Nous avons déduit de la solution de Brouwer une expression approchée des perturbations du premier ordre dues à l'aplatissement terrestre. D'après la valeur du coefficient $J_{2,0}$, nous pouvons constater que les effets séculaires produits sont beaucoup plus grands que les effets relativistes correspondants. Par exemple, si l'orbite est équatoriale, le mouvement du périgée est rétrograde et de l'ordre de 61 $(R_0/a)^{7/2}$ rd/an [1] alors que le mouvement relativiste du périgée dans le champ de Schwarzschild (1-89) est de $8\times10^{-5}\ (R_0/a)^{5/2}$ rd/an, où R_0/a est de l'ordre de 1 pour un satellite proche de la Terre.

2. **Ellipticité de l'équateur terrestre.** — Le potentiel perturbateur dû à l'asymétrie de révolution de la Terre est le suivant (l'indice s désigne ici les harmoniques sectoriels) :

$$R_s = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} R_{nm}\,. \tag{1-27}$$

Nous étudierons l'influence de ce champ sur le mouvement d'un satellite au moyen des équations de Delaunay (1-16). Nous rappellerons d'abord la forme générale de la solution de Morando [45] et nous préciserons les conditions pour lesquelles les variations des éléments sont exclusivement de courte période. Nous montrerons ensuite qu'il est possible de satisfaire ces conditions compte tenu des harmoniques sectoriels pour lesquelles $m \leq 7$. Nous éviterons ainsi la présence de variations séculaires dont il faudrait tenir compte pour mettre en évidence des effets relativistes. Nous donnerons enfin l'ordre de grandeur des variations périodiques présentes.

1. Solution. — Chacun des harmoniques sectoriels peut se mettre sous la forme d'un développement en série en fonction de l'excentricité :

$$R_{nm} = J_{nm}\, a^{-(n+1)} \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} B_{\alpha\beta}(e, i) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left[\alpha\, l + \beta\, g + m\,(h - \lambda_{nm})\right]; \tag{1-28}$$

λ_{nm}, constant dans un système lié à la Terre en rotation, est ici variable et égal à $\lambda_{nm} + \omega_0\, t$, où λ_{nm} est une constante et ω_0 est la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même.

Le temps apparaît au second membre des équations (1-16) et, pour l'éliminer, Morando définit une nouvelle variable $\boldsymbol{h} = h - \omega_0\, t = \Omega - \omega_0\, t$. La condition de Poincaré est satisfaite et la forme des équations canoniques conservée si le nouvel hamiltonien $\boldsymbol{F}$ est défini par

$$\boldsymbol{F} = (\mu^2/2\,L^2) + \omega_0\, H + R_{nm}\,. \tag{1-29}$$

[1] Si l'inclinaison est nulle, la longitude du périgée nous est donnée par $\varpi = \omega + \Omega$. D'après (1-26), on a $\dot{\varpi} = K_z + J_z = (3\,n/2)\ (J_{20}/R_0^2)\ (R_0/p)^2$. $J_{20} \simeq 1{,}08 \times 10^{-3}$ et $n \simeq 17{,}04\ (R_0/a)^{3/2}$ rév/j. Ainsi, $\dot{\varpi} \simeq 61\ (R_0/a)^{7/2}$ rd/an si on néglige les termes en e^2.

La variation totale $(\mathrm{D}c_i)_s$ des éléments elliptiques déduite de la variation des éléments de Delaunay est alors la suivante :

$$
\left.
\begin{aligned}
(\mathrm{D}_s a)/a &= r\, AB_{\alpha\beta}\, C \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} M\,, \\
\mathrm{D}_s e &= \left[(\alpha-\beta)/e\right] AB_{\alpha\beta}\, C \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} M\,, \\
\mathrm{D}_s i &= \left[\beta\cos i - (\mathrm{m}/\sin i)\right] AB_{\alpha\beta}\, C \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} M\,, \\
\mathrm{D}_s\omega &= -(\partial B_{\alpha\beta}/\partial G)\, A\, C \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} M\,, \\
\mathrm{D}_s\Omega &= -(\partial B_{\alpha\beta}/\partial H)\, A\, C \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} M\,,
\end{aligned}
\right\} \qquad (1\text{-}30)
$$

où $A = J_{\mathrm{nm}}\, a^{-n}\,(n\,\omega_0^{-1})$, $M = \alpha\, l + \beta\, g + \mathrm{m}\,\boldsymbol{h}$, $C = \left[(\alpha\, n/\omega_0) - \mathrm{m}\right]^{-1}$.
La période de ces oscillations est de $|C|$ j.

Pour certaines valeurs du demi-grand axe a, la période de révolution du satellite est telle que $(\alpha\, n/\omega_0) - \mathrm{m} = 0$ dans certains termes du développement (1-28). Au second membre des équations différentielles du mouvement, il apparaît alors des termes constants (au premier ordre en J_{20}) et la variation des éléments a une partie séculaire.

2. Absence de variations séculaires. — Il est possible de choisir une valeur du demi-grand axe telle qu'un certain nombre d'harmoniques ne produisent pas de variations dont la période soit supérieure à une certaine limite. Il est intéressant de préciser ces conditions car si elles peuvent être satisfaites, les effets relativistes séculaires sont facilement séparables.

Pour éviter dans (1-30) la présence de variations dont la période soit supérieure à $|C|$ j, il faut satisfaire à la condition

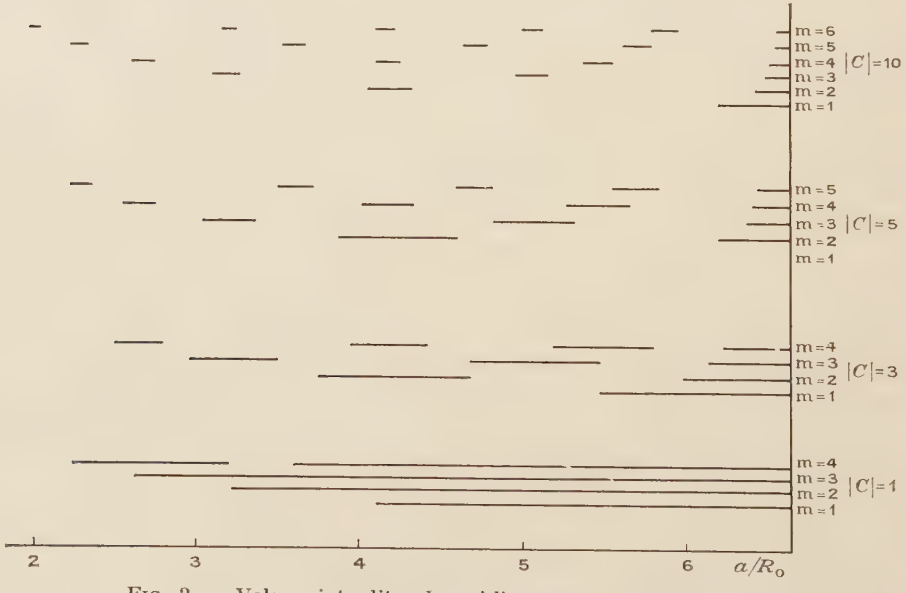


FIG. 2. — Valeurs interdites de a si l'on veut que la période des variations soit inférieure à $|C|$ jours (——).

(1-31) $$C\,|(\alpha\, n/\omega_0) - \mathrm{m}| \geqq 1$$

qui, compte tenu de $(a/R_0)^{3/2} \simeq (\omega_0/n)\,17{,}04$ (²), s'écrit encore

(1-32) $$(a/R_0)^{3/2} \leqq [C/(\mathrm{m}\,C+1)]\,17{,}04\,,\quad (a/R_0)^{3/2} \leqq [C/(\mathrm{m}\,C-1)]\,17{,}04\,.$$

Il est plus difficile de satisfaire les conditions (1-32) si la période de variation des éléments doit être faible et si l'on tient compte d'un grand nombre d'harmoniques (fig. 2). Nous admettrons ici que les effets dus aux harmoniques pour lesquels $\mathrm{m} \geqq 7$ sont négligeables. En effet, les résultats de Kosai [36], de Zhongolovitch [69] et d'Izsak [27] indiquent que les coefficients J_{nm} décroissent assez rapidement (en unité $10^{-6}\,R_0^n$) :

$$J_{31} \simeq 2\,,\quad J_{22} \simeq 1\,,\quad J_{33} \simeq 0{,}5\,,\quad J_{44} \simeq 0{,}05\,,$$
$$J_{41} \simeq 0{,}3\,,\quad J_{32} \simeq 0{,}2\,,\quad J_{43} \simeq 0{,}04\,,$$
$$J_{42} \simeq 0{,}08\,.$$

De plus, les perturbations proportionnelles à une puissance supérieure ou égale à m de R_0/a décroissent rapidement si le demi-grand axe augmente.

La figure 2 montre que plusieurs valeurs de a sont encore acceptables si la période des variations dues aux harmoniques retenus ($\mathrm{m} < 7$) doit être inférieure ou égale à 10 j. Nous retiendrons donc cette valeur de $|C|$ pour calculer l'amplitude des variations dues au principal harmonique sectoriel R_{22}. Cette donnée nous servira à évaluer l'ordre de grandeur de l'amplitude des variations dues à l'ellipticité de l'équateur terrestre.

3. Expression approchée des effets du premier ordre. — Choisissons l'origine des longitudes telle que λ_{22} soit nul. Au premier ordre en fonction de l'excentricité, la valeur de R_{22} calculée à l'aide des relations

(1-33) $$\begin{aligned}\cos\beta\cos\lambda &= \cos\boldsymbol{h}\cos\nu - \sin\boldsymbol{h}\cos i\sin\nu\,,\\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin\boldsymbol{h}\cos\nu + \cos\boldsymbol{h}\cos i\sin\nu\,,\end{aligned}\qquad \sin\beta = \sin i\sin\nu$$

est la suivante :

(1-34) $$\begin{aligned}R_{22} = \frac{3\,J_{22}\,p^4}{2\,L^6}\Big\{ &\sin^2 i\left[\cos 2\boldsymbol{h} + \right.\\ &\left. + \frac{3\,e}{2}\left(\cos(2\boldsymbol{h}+l) + \cos(2\boldsymbol{h}-l)\right)\right] +\\ &+ \cos^4\frac{i}{2}\left[2\cos(2\boldsymbol{h}+2g+2l) + \right.\\ &\left. + e\left(7\cos(2\boldsymbol{h}+2g+3l) - \cos(2\boldsymbol{h}+2g+l)\right)\right] +\\ &+ \sin^4\frac{i}{2}\left[2\cos(2\boldsymbol{h}-2g-2l) + \right.\\ &\left. + e\left(7\cos(2\boldsymbol{h}-2g-3l) - \cos(2\boldsymbol{h}-2g-l)\right)\right]\Big\}.\end{aligned}$$

où

$$e = \left[1 - (G^2/L^2)\right]^{1/2},\quad 4\cos^4(i/2) = \left[1 + (H/G)\right]^2,$$
$$\sin^2 i = 1 - (G^2/L^2)\,,\quad 4\sin^4(i/2) = \left[1 - (H/G)\right]^2.$$

(²) On a, en effet, $n \simeq 17{,}04\,(R_0/a)^{3/2}$ rév/j et, dans les mêmes unités, $\omega_0 = 1$.

La définition (1-15) et la solution (1-30) permettent alors le calcul de la variation des éléments elliptiques. Pour chacun des termes de cette solution si α, le coefficient de l dans l'argument M (1-30), est supérieur ou égal à m, $|C| \leqq 1$; si $\alpha \leq m$, $|C|$ peut devenir infini. Nous avons vu cependant (§ III.2.*2*) que, dans ce dernier cas, il était possible d'imposer une valeur limite de 10 à C. Dans ces conditions, il n'existe aucune variation séculaire et, compte tenu de $(n/\omega_0) \simeq 17{,}04\,(R_0/a)^{3/2}$, les variations des éléments sont de courte période ($\leqq 10$ j) et leur amplitude est de l'ordre de

$$(1\text{-}35) \qquad (A_{sc}a)/a = 4(A_{sc}e) = A_{sc}i = 6\,(A_{sc}\omega) = 4\,(A_{sc}\Omega) = 10^3\,J_{22}\,a^{-7/2} \simeq 10^{-3}(R_0/a)^{7/2}\ \text{rd}\,.$$

4. Valeur des paramètres. — Il existe deux méthodes pour déterminer les coefficients J_{nm} ($m \neq 0$). Dans la première, ces quantités sont déduites de la variation des éléments orbitaux de satellites terrestres. L'inconvénient de cette méthode est la mauvaise répartition statistique des observations sur un satellite, fonctions de la position de la station d'observation. Dans la seconde méthode, les J_{nm} sont déduits de la valeur de l'accélération en divers points du globe. Ici encore, la répartition des observations est difficilement uniforme. Il semble, selon Jeffreys [31] et d'après l'étude de Zhongolovitch [69], que les mesures de la gravité donneront de meilleurs résultats pour les coefficients pour lesquels $m \geqq 2$.

5. Conclusion — Cette étude des perturbations dues à l'ellipticité de l'équateur terrestre nous a fourni les résultats suivants :

a) il est possible de choisir des valeurs du demi-grand axe a telles qu'il n'apparaisse aucune variation séculaire des éléments elliptiques ;

b) il y a davantage de restrictions sur ces valeurs admissibles de a si l'on veut à la fois

réduire la période et l'amplitude des variations périodiques présentes,

tenir compte d'un grand nombre d'harmoniques R_{nm} ;

c) il reste toutefois suffisamment de possibilités (fig. 2) si l'on s'en tient aux conditions suivantes :

période des variations inférieure ou égale à 10 j,

harmoniques R_{nm} pour lesquelles $m < 7$.

Ainsi, pour certaines valeurs du demi-grand axe l'ellipticité de l'équateur terrestre n'entraîne aucune variation séculaire dont il faille tenir compte dans la prévision théorique d'effets séculaires.

3. **Attraction d'un troisième corps.** — L'écriture dans le repère $oxyz$ des équations du mouvement, valable dans un repère inertial, montre que la contribution d'un troisième corps (Lune, Soleil ou planète) au potentiel gravitationnel s'exerçant sur le satellite est la suivante :

$$(1\text{-}36) \qquad R_t = \mu^* \left[|\vec{r} - \vec{r}^*|^{-1} - (\vec{r}\,.\,\vec{r}^*/r^{*3}) \right],$$

où les éléments du troisième corps sont marqués d'un astérique.

Cette quantité peut se mettre sous la forme d'un développement en série à l'aide des polynômes de Legendre :

$$R_t = (\mu^*/r^*) \sum_{n=2}^{\infty} (r/r^*)^n \, P_n(\cos \widehat{r\, r^*}) , \tag{1-37}$$

où

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{r\, r^*}) = {} & \cos \nu^* \cos(\Omega - \Omega^*) \cos \nu - \sin(\Omega - \Omega^*) \cos i \sin \nu + \\ & + \sin \nu^* \cos i^* \sin(\Omega - \Omega^*) \cos \nu + \cos(\Omega - \Omega^*) \cos i \sin \nu + \\ & + \sin \nu^* \sin i^* \sin i \sin \nu . \end{aligned}$$

Dans le cas d'un satellite terrestre, les principales perturbations dues à un troisième corps sont causées par le Soleil et la Lune. Pour ces deux corps, les valeurs du coefficient de r/r^* sont respectivement de l'ordre de $4{,}3\times10^{-5}$ et de $1{,}7\times10^{-2}$. Pour cette raison nous limiterons le développement (1-37) au terme d'ordre le plus faible en r/r^* : l'harmonique d'ordre 2. On a

$$P_2 = \tfrac{1}{2}(3 \cos^2 \widehat{r\, r^*} - 1) . \tag{1-38}$$

Nous utiliserons le développement de R_{t2} (deuxième harmonique du potentiel R_t) donné par Kosai pour évaluer les effets périodiques et séculaires du premier ordre. Examinons d'abord la forme générale de la solution.

1. Solution. — Limité à l'harmonique d'ordre 2, le potentiel perturbateur (1-37) peut se mettre sous la forme d'un développement en série en fonction de l'excentricité des orbites du satellite et du troisième corps :

$$R_{t2} = A \sum_{\alpha,\beta,\alpha^*,\beta^*,\gamma} B_{\alpha,\beta,\alpha^*,\beta^*,\gamma}(i^*, e^*, i, e) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} M , \tag{1-39}$$

où

$$A = \frac{\mu^*}{a^*}\left(\frac{a}{a^*}\right)^2 , \quad \sum B_{\alpha,\beta,\alpha^*,\beta^*,\gamma} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} M = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a^*}{r^*}\right)^3 P_2(\cos \widehat{r\, r^*}) ,$$

$$M = [\alpha l + \beta \omega + \alpha^* l^* + \beta^* \omega^* + \gamma(\Omega - \Omega^*)] .$$

Comme nous l'avons déjà dit, nous tiendrons compte ici des variations séculaires de ω et de Ω dues à l'aplatissement terrestre [relation (1-26)]. Considérons d'abord les variations dues aux termes du développement (1-39) pour lesquels les quantités α, α^*, β, β^* et γ ne sont pas toutes nulles.

2. Variations périodiques. — Si nous calculons la variation des éléments elliptiques à l'aide des définitions (1-15) et des équations aux variations (1-16) des éléments de Delaunay et si nous intégrons par rapport au temps, l'amplitude A_t (t pour troisième corps) de la variation périodique d'argument $M(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*, \gamma)$ est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll} (A_t a)/a & = (2A/L)\, \alpha\, C\, B_{\alpha,\beta,\alpha^*,\beta^*,\gamma} , \\ A_t e & = (A/L\, e)(\alpha - \beta)\, C\, B_{\alpha,\beta,\alpha^*,\beta^*,\gamma} , \\ A_t i & = (A/L \sin i)(\beta \cos i - \gamma)\, C\, B_{\alpha,\beta,\alpha^*,\beta^*,\gamma} , \\ A_t \omega & = A\, C\, (\partial B_{\alpha,\beta,\alpha^*,\beta^*,\gamma}/\partial G) , \\ A_t \Omega & = A\, C\, (\partial B_{\alpha,\beta,\alpha^*,\beta^*,\gamma}/\partial H) , \end{array}\right. \tag{1-40}$$

où

$$C = [\alpha \bar{n} + \beta \bar{\dot{\omega}} + \alpha^* n^* + \beta^* \bar{\dot{\omega}}^* + \gamma(\bar{\dot{\Omega}} - \bar{\dot{\Omega}}^*)]^{-1} .$$

Pour les termes du développement (1-39) d'ordre 0 par rapport à l'excentricité,

on a $\alpha = \beta$ (Kaula [33] p. 31). Ainsi, les variations (1-40) de e, où e apparaît au dénominateur, sont finies pour $e = 0$. Pour $i = 0$, le potentiel en un point n'est plus fonction que de la somme $\omega + \Omega$ de sorte que le développement se réduit alors aux termes pour lesquels $\beta = \gamma$. Ainsi, les variations de i, où i apparaît au dénominateur, sont aussi finies pour $i = 0$.

3. Variations séculaires. — Les variations séculaires proviennent des termes du développement (1-39) pour lesquels les quantités α, α^*, β, β^* et γ sont nulles. Les équations (1-16) permettent de calculer la dérivée par rapport au temps des éléments de Delaunay, les définitions (1-15) celle des éléments elliptiques. Ces dérivées sont indépendantes du temps et l'intégration est immédiate.

4. Expression approchée des effets du premier ordre. — Les variations de courte période proviennent des termes du développement pour lesquels $\alpha \neq 0$. La valeur correspondante de C est de l'ordre de n^{-1} car n, de l'ordre de 17 rév/j, est beaucoup plus grand que les autres termes. L'amplitude des variations de courte période A_{tc} est ainsi de l'ordre de

$$(1\text{-}41) \qquad (A_{tc}a)/a \simeq A_{tc}e \simeq A_{tc}i \simeq e\,(A_{tc}\omega) \simeq A_{tc}\Omega \simeq (\mu^*/n^2\,a^{*3}) \text{ rd}$$

et leur période est de l'ordre de la période de révolution du satellite, soit quelques heures.

Les variations de longue période proviennent des termes pour lesquels $\alpha = 0$. Si le développement du potentiel perturbateur est limité aux termes en $O(e^2)$, les arguments sont fonctions de la longitude du troisième corps et de la longitude des nœuds du satellite et du troisième corps (Kosai [35]). Les quantités C sont respectivement de l'ordre de $\dot{\Omega}^{-1} = a^2/J_{2,0}\,n\cos i$ et de l'ordre de n^{*-1}. L'amplitude des variations correspondantes de l'un des éléments c_i est la suivante :

$$(1\text{-}42) \qquad \begin{aligned} A_{t1}c_i &\simeq (\mu^*/n^2\,a^{*3})\,(a^2/J_{2,0}) \text{ rd}\,, \\ A_{t1}c_i &\simeq A/L\,n^* \simeq 4{,}77\times10^2\,(\mu^*/n^2\,a^{*3})\,(R_0/a)^{3/2} \text{ rd}\,. \end{aligned}$$

Les périodes associées $2\pi/C$ sont de l'ordre de 1 mois.

Pour évaluer les variations séculaires, nous conservons les termes d'argument $\Omega - \Omega^*$ du potentiel perturbateur R_{t2} (1-39). Si l'inclinaison de l'orbite est proche de 90°, les mouvements séculaires du nœud dus à l'aplatissement terrestre (1-26) sont très faibles et les termes fonctions de $\Omega - \Omega^*$ peuvent être constants par résonance (il y a résonance si Ω^* a même variation que Ω). La variation des éléments est alors la suivante :

$$(1\text{-}43) \qquad \begin{cases} \dot{\bar{i}} = I_{1t} \sin(\Omega - \Omega^*) + I_{2t} \sin 2(\Omega - \Omega^*)\,, \\ \dot{\bar{\omega}} = J_t + J_{1t}\cos(\Omega - \Omega^*) + J_{2t}\cos 2(\Omega - \Omega^*)\,, \\ \dot{\Omega} = K_t + K_{1t}\cos(\Omega - \Omega^*) + K_{2t}\cos 2(\Omega - \Omega^*)\,, \end{cases}$$

où

$$I_{1t} = -B_t \sin 2i^* \cos i\,, \qquad I_{2t} = -B_t \sin^2 i^* \sin i\,,$$

$$J_t = B_t\left(1 + \frac{3e^2}{2}\right)^{-1}\left(1 - 3\sin^2\frac{i^*}{2}\right)(-1 + 5\cos^2 i + e^2)\,,$$

$$J_{1t} = 2\,B_t\left(1 + \frac{3e^2}{2}\right)^{-1} \sin 2i^* \sin 2i \left(1 - \operatorname{cotg}^2\frac{i}{4}\right) + O(e^2)\,,$$

$$J_{2t} = B_t\left(1 + \frac{3\,e^2}{2}\right)^{-1} \sin^2 i^* \frac{3 - 5\cos^2 i}{2} + O(e^2)\,,$$

$$K_t = -\,B_t\,2\left(1 - 3\sin^2\frac{i^*}{2}\right)\cos i\,, \qquad K_{1t} = B_t \frac{\sin 2\,i^* \cos 2\,i}{\sin i}\,,$$

$$K_{2t} = B_t \sin^2 i^* \cos i\,,$$

$$B_t = \frac{3\,\mu^*}{8\,n_0\,a^{*3}}(1 - e^2)^{-1/2}\left(1 + \frac{3\,e^2}{2}\right)\left(1 + \frac{3\,e^{*2}}{2}\right)\left(\frac{a}{R_0}\right)^{3/2}, \qquad n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}}.$$

5. Valeur des paramètres. — La valeur des quantités μ^*/a^{*3} nous est donnée par l'étude du mouvement des planètes autour du Soleil ou de satellites autour de la Terre. On a

$$\mu_L/a_L^3 = 6{,}42\times10^{-4}\,(\mathrm{rd/j})^2\,, \quad \mu_S/a_S^3 = 2{,}962\,6\times10^{-4}\,(\mathrm{rd/j})^2\,.$$

Les quantités μ^*/a^{*3} sont du même ordre de grandeur pour la Lune et pour le Soleil ; il en sera de même pour les perturbations résultantes. En effet, les valeurs correspondantes de B_t sont de $8{,}24\times10^{-4}$ et $3{,}79\times10^{-4}$ rd/an. μ_L/a_L^3 et μ_S/a_S^3 peuvent respectivement être déterminés avec des erreurs relatives de 10^{-5} et 10^{-8}.

6. Conclusion. — Cette étude des perturbations classiques dues à un troisième corps nous a montré que les champs gravitationnels lunaire et solaire produisent des mouvements séculaires du périgée et du nœud. Ces effets sont moins importants que ceux dus à l'aplatissement terrestre. Pour une orbite équatoriale par exemple, les mouvements du périgée sont de $2{,}4\times10^{-3}\ (a/R_0)^{3/2}$ au lieu de $61\ (R_0/a)^{7/2}$ rd/an. Ils restent cependant supérieurs à l'effet relativiste de Schwarzschild $8\times10^{-5}\ (R_0/a)^{5/2}$ rd/an.

Retenons encore que, pour l'orbite polaire, les variations de l'inclinaison peuvent être cumulatives et sont susceptibles de masquer une variation relativiste séculaire de cet élément. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans la discussion (chap. IV).

4. **Marées terrestres.** — Les perturbations dues aux marées terrestres sont analogues à celles dues à l'attraction gravitationnelle d'un troisième corps.

L'attraction de la Lune ou du Soleil n'est pas la même en chaque point de la Terre. Pour cette raison, la Terre se déforme (marée terrestre) et au potentiel déjà présent s'ajoute une contribution proportionnelle au potentiel produisant la déformation.

La durée de propagation des ondes de déformation le long d'un diamètre terrestre, de l'ordre de 0,5 h, est plus court que la période de révolution de la Terre sur elle-même. Le déphasage entre le potentiel cause de la déformation et la déformation elle-même est faible et peut être négligé en première approximation.

Dans ces conditions, le potentiel des marées terrestres peut s'écrire (Melchior [43])

$$R_m = \sum_{n=2}^{\infty} K_n(r)\,R_{tn}\,, \tag{1-44}$$

où $K_n(r)$ est la fonction de r associée au n^{me} harmonique R_{tn} du potentiel d'un troisième corps (1-37).

Comme dans le cas précédent, nous évaluerons les effets périodiques et séculaires à partir du développement de R_m limité au second harmonique :

$$R_m \simeq K_2(r)\, R_{t2}\,. \tag{1-45}$$

La fonction K_2 est déterminée par les conditions suivantes :
l'harmonique d'ordre 2 dans R_m doit décroître comme $(R_0/r)^3$,
$K_2(R_0) = k$, où k est l'un des trois nombres de Love.
On a $K_2 = k(R_0/r)^5$.

1. Solution. — Le calcul montre qu'à l'approximation d'ordre 0 de l'excentricité de l'orbite, le développement du potentiel dû aux marées est donné par la relation (1-39) à condition d'y remplacer A par A^*, avec

$$A^* = k\,(\mu^*/\mu)\,(R_0/a^*)^2\,(R_0/a)^3\,. \tag{1-46}$$

Les variations périodiques sont du même ordre que celles dues à l'attraction gravitationnelle d'un troisième corps. En effet, d'après la forme du potentiel et la valeur de A^*, seules les dérivées par rapport à L des équations du mouvement sont différentes, quoique du même ordre [toujours à $O(e)$ près]. L'amplitude des variations de courte et de longue périodes sera la suivante :

$$\begin{aligned} A_{mc}c_i &= k\,(\mu^*/\mu)\,(R_0/a^*)^3\,(R_0/a)^2\,, \\ A_{ml}c_i &= k\,(\mu^*/\mu)\,(R_0/a^*)^3\,(R_0^2/J_{2,0}) \\ &\quad \text{ou } k\,4{,}77\times10^{-2}\,(\mu^*/\mu)\,(R_0/a^*)^3\,(R_0/a)^{7/2}\,. \end{aligned} \tag{1-47}$$

Les termes du potentiel perturbateur indépendants de l'anomalie moyenne l sont les mêmes qu'en (1-39) à $O(e^3)$ près. Ainsi, les variations séculaires (ou cumulatives) de ω, Ω et i nous sont données par

$$\left\{\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}}_{tm} &= J_{tm} + J_{1tm}\cos(\Omega - \Omega^*) + J_{2tm}\cos 2(\Omega - \Omega^*)\,, \\ \dot{\bar{\Omega}}_{tm} &= K_{tm} + K_{1tm}\cos(\Omega - \Omega^*) + K_{2tm}\cos 2(\Omega - \Omega^*)\,, \\ \dot{\bar{i}}_{tm} &= I_{1tm}\sin(\Omega - \Omega^*) + I_{2tm}\sin(\Omega - \Omega^*)\,, \end{aligned}\right. \tag{1-48}$$

où les quantités $I_{..m}$ et $K_{..m}$ [$J_{..m}$] sont égales aux quantités correspondantes (1-43) à $O(e^3)$ [$O(e)$] près, si l'on remplace dans ces dernières B_t par

$$B_{tm} = (3\,k/8)\,(\mu^*/n_0\,a^{*3})\,(R_0/a)^{7/2}\,.$$

2. Valeur des paramètres. — La valeur du nombre k de Love dépend du modèle adopté pour la constitution interne de la Terre. Elle est généralement de l'ordre de $0{,}3 \pm 0{,}1$ (Slichter [58]).

Aux perturbations dues aux marées terrestres s'ajoutent celles dues aux marées océaniques. Le potentiel perturbateur est ici fonction du temps comme c'était le cas pour les harmoniques sectoriels du potentiel terrestre. Les principaux effets sont périodiques et, au premier ordre en R_0/a, analogues à ceux dus au second harmonique $R_{2,2}$ pour un coefficient $J_{2,2}$ de l'ordre de 10^{-8} (Kaula [33] p. 44). On peut penser que l'effet séculaire par révolution est beaucoup plus petit que cette quantité et, par conséquent, négligeable.

3. Conclusion. — Les perturbations dues aux marées terrestres sont analogues à celles dues aux champs lunaire et solaire. Elles sont cependant $B_{tm}/B_t = 0{,}3\,(R_0/a)^5$ fois plus faibles. Par conséquent, si le demi-grand axe de l'orbite augmente, leur

importance relative diminue très rapidement. Ces perturbations restent cependant supérieures aux effets relativistes. Par exemple, dans le cas de l'orbite équatoriale, le mouvement du périgée dû aux marées est $10\, R_0/a$ fois plus grand que l'effet relativiste dans le champ de Schwarzschild.

5. **Précession et nutation terrestres.** — Considérons maintenant l'influence du mouvement de l'axe de rotation terrestre sur celui d'un satellite.

Le système de référence $oxyz$ que nous avons choisi pour l'étude du mouvement d'un satellite (défini au début du chap. I) est lié à l'axe instantané de rotation de la Terre. Il est entraîné par les mouvements de précession et de nutation de ce dernier. La valeur de la rotation instantanée $\vec{\Omega}$ de ce repère par rapport aux étoiles est cependant très faible et seuls les effets cinématiques sont ici sensibles.

Soit le repère oxyz lié au centre de la Terre, tel que oxy coïncide avec le plan de l'écliptique (nous négligeons les mouvements de l'écliptique par rapport aux étoiles) et que la direction de ox soit fixe par rapport aux étoiles. La position du

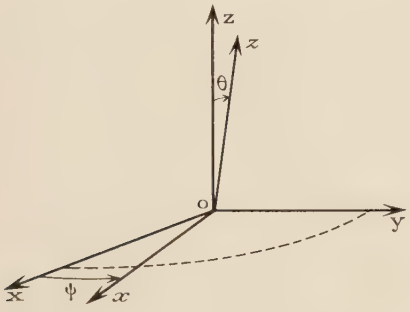
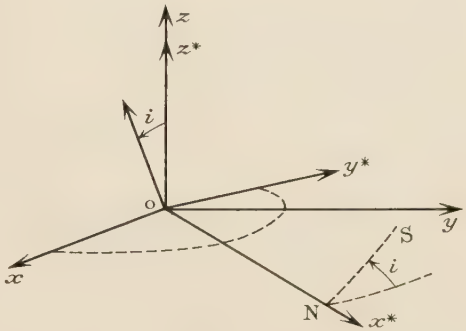


Fig. 3.



oxy, plan de l'écliptique ; oz, axe normal au plan de l'écliptique ; oz, oz*, axe de rotation terrestre ; ox, intersection des plans de l'écliptique et de l'équateur ; ox*, ligne nodale ; oxy, ox*y*, plan de l'équateur.

Fig. 4.

repère $oxyz$ nous est donnée par les angles $\theta = \widehat{oz, oz}$ et $\psi = \widehat{ox, ox}$ (fig. 3). L'axe ox est toujours à l'intersection des plans instantanés de l'écliptique et de l'équateur. Par définition, la précession définit le moyen mouvement de $\dot{\psi}$ et la nutation les variations périodiques de θ et de $\dot{\psi}$.

Les composantes de la rotation instantanée $\vec{\Omega}$ dans le repère $oxyz$ se déduisent de $\dot{\theta}$ et de $\dot{\psi}$. Dans le système $ox^*y^*z^*$ (fig. 4) tel que oz^* coïncide avec oz, ox^* coïncide avec la ligne nodale, oy^* soit normal à ox^* et à oz^* et forme un système droit, les composantes de $\vec{\Omega}$ sont les suivantes :

$$(1\text{-}49) \qquad \begin{aligned} \Omega_{x^*} &= \dot{\theta}\cos\Omega + \dot{\psi}\sin\theta\sin\Omega\,, \\ \Omega_{y^*} &= -\dot{\theta}\sin\Omega + \dot{\psi}\sin\theta\cos\Omega\,, \qquad \Omega_{z^*} = \dot{\psi}\cos\theta\,. \end{aligned}$$

1. Solution. — La variation des éléments elliptiques en fonction de ces quantités nous est donnée géométriquement par

$$(1\text{-}50)\qquad \begin{aligned} &\dot a = 0\,, \qquad \dot e = 0\,, \qquad \dot i = -\,\Omega_{x^*}\,,\\ &\dot\omega = \sin^{-1} i\,\Omega_{y^*}\,, \qquad \dot\Omega = -\,\Omega_{z^*} - \operatorname{tg}^{-1} i\,\Omega_{y^*}\,. \end{aligned}$$

Le nœud ascendant de l'orbite solaire est ici l'origine des Ω. Nous pouvons ainsi remplacer Ω par $\Omega - \Omega_S$. Remplaçons dans (1-50) les composantes de la rotation du système de référence choisi $oxyz$ par leur valeur. Si nous conservons les termes d'argument $\Omega - \Omega_S$ qui peuvent être cumulatifs, il vient

$$(1\text{-}51)\qquad \begin{cases} \dot i_{pn} = I_{1pn}\cos(\Omega-\Omega_S) + I_{2pn}\sin(\Omega-\Omega_S)\,,\\ \dot\omega_{pn} = J_{1pn}\cos(\Omega-\Omega_S) + J_{2pn}\sin(\Omega-\Omega_S)\,,\\ \dot\Omega_{pn} = K_{pn} + K_{1pn}\cos(\Omega-\Omega_S) + K_{2pn}\sin(\Omega-\Omega_S)\,, \end{cases}$$

$$(1\text{-}52)\qquad \begin{cases} I_{1pn} = \dot\theta\,, \quad I_{2pn} = \dot\psi\sin\theta\,,\\ J_{1pn} = -\,\dot\psi\sin\theta\sin^{-1} i\,, \quad J_{2pn} = \dot\theta\sin^{-1} i\,,\\ K_{pn} = -\,\dot\psi\cos\theta\,, \quad K_{1pn} = \dot\psi\sin\theta\operatorname{tg}^{-1} i\,, \quad K_{2pn} = -\,\dot\theta\operatorname{tg}^{-1} i\,, \end{cases}$$

2. Valeur des paramètres. — Les mouvements de précession et de nutation nous sont donnés par l'observation. Ainsi, le mouvement séculaire de Ω_S est rétrograde. Sa valeur moyenne est de $\dot\psi = -\,2{,}435\times10^{-4}$ rd/an ($50{,}255 \pm 0{,}002''$/an). Le mouvement de θ est périodique, d'amplitude égale à $9{,}200 \pm 0{,}005''$ et de période égale à 18 ans. Ainsi, $\dot\theta$ ne dépasse pas $1{,}5\times10^{-5}$ rd/an.

3. Conclusion. — Si nous nous plaçons dans un repère dont l'orientation dépend de celle de l'axe de rotation terrestre (défini au début du chap. I), les mouvements de précession et de nutation de cet axe entraînent une variation séculaire de Ω. D'après (1-64), ce mouvement du nœud, de l'ordre de 10^{-4} rd/an, est plus faible que ceux dus aux champs lunaire et solaire. Toutefois, il est encore 10^2 fois plus grand que les mouvements relativistes du nœud (1-93) et (1-98).

Si l'orbite est polaire, les variations de l'inclinaison et de l'argument du périgée peuvent être cumulatives (nous en préciserons les conditions à la fin de ce chapitre) et aussi de l'ordre de 10^{-4} rd/an.

6. **Résistance de l'air.** — Un satellite plongé dans l'atmosphère terrestre est soumis à une force due à la résistance de cette dernière au mouvement. Pour étudier la variation résultante des éléments orbitaux, nous devons utiliser une expression analytique de la densité de l'atmosphère. Nous rappellerons tout d'abord les caractéristiques de deux modèles analytiques d'atmosphère. Le modèle d'atmosphère le plus simple admet une répartition à symétrie sphérique. Il n'est qu'approché par rapport à la répartition réelle mais suffit pour une évaluation de la variation des paramètres a, e, i et Ω. Cook & Plimmer [8] ont effectué ce calcul. L'hypothèse d'une telle répartition à symétrie sphérique conduit à une variation nulle de ω. Aussi, nous utiliserons, dans ce dernier cas, une expression plus exacte de la densité. Nous constaterons alors que l'argument du périgée varie également. Notons que les paramètres de ces modèles analytiques sont déterminés à partir des variations observées de la période de révolution.

1. Modèle symétrique. — Le premier modèle d'atmosphère, déduit de l'hypothèse du gaz parfait en équilibre thermique et hydrostatique, est de la forme

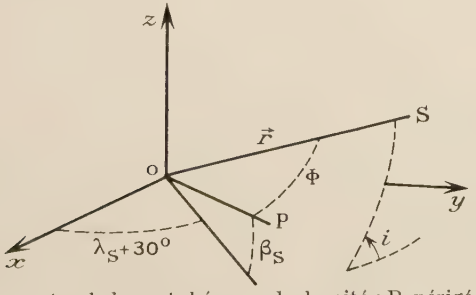
$$\rho(r) = \rho_0(r_0) \exp\left[-(r - r_0)/H_0\right], \tag{1-53}$$

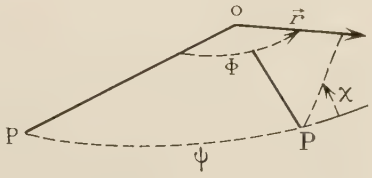
où ρ_0 est la densité aux points pour lesquels $r = r_0$, $H = \boldsymbol{k}\, T/g\, \overline{m}$ est l'échelle de hauteur (H_0 étant la valeur de H en r_0), $\boldsymbol{k}$ est la constante de Boltzmann, T est la température absolue, g est l'accélération de la pesanteur, m est la masse moléculaire moyenne. Ce premier modèle n'est cependant qu'approché.

2. Modèle asymétrique. — Pour tenir compte de l'aplatissement terrestre, il faut remplacer dans (1-53) $r - r_0$ par $h - h_0$, où h est l'altitude mesurée à partir de la surface terrestre (Parkyn [50]). De plus, l'observation met en évidence (Paetzolt & Zschörner [48]) une nette différence dans l'accélération que subit un satellite suivant que son périgée est ou n'est pas au-dessus de la face éclairée de la Terre. Ainsi la densité n'est pas à symétrie sphérique en $h - h_0$. Le rayonnement et le vent de plasma solaire sont causes de cette asymétrie. En effet, des expériences (Hinteregger [25]) ont montré que les radiations ultraviolettes de longueur d'onde de 3 à 20 cm sont absorbées dans la région de l'atmosphère comprise entre 200 et 300 km d'altitude. Il se produit ainsi un échauffement local et une protubérance correspondante du profil des surfaces de densité constante. Harris & Priester [22] ont calculé un modèle d'atmosphère à partir d'un système d'équations différentielles décrivant l'évolution d'un milieu conducteur de la chaleur et soumis à l'influence des deux sources : rayonnement et plasma solaire. Sous certaines conditions aux limites, ils ont pu rendre compte des effets observés. En particulier, ils ont retrouvé un maximum de la densité à 2 h (heure locale) et les variations semi-annuelles dues à l'activité géomagnétique (Jacchia [29]). L'expression analytique de ce second modèle, introduite par Jacchia [28] et modifiée par Wyatt [67], est la suivante (fig. 5) :

$$\rho(r) = \rho_m(r)\, F_{20}\left[1 + \varphi(r) \cos^6(\Phi/2)\right], \tag{1-54}$$

où $\varphi(r) = 4{,}6 + 4 \operatorname{tg}^{-1}\left[0{,}005\,(h - 600)\right]$, $\rho_m(r)$ est la valeur de la densité minimale à l'altitude considérée, F_{20} l'intensité de la raie de 20 cm (mesure relative de l'activité solaire), Φ la distance angulaire, vue du centre de la Terre, du point p (fig. 5) considéré au centre de la protubérance située à la latitude du Soleil et à une longitude d'environ 30° supérieure à celle du Soleil, h l'altitude exprimée en kilomètres.





p, centre de la protubérance de densité ; P, périgée ; β_S, λ_S, longitude et latitude du Soleil.

Fig. 5. Fig. 6.

Ces modèles ne rendent cependant pas compte des irrégularités locales. Ainsi, la présence du champ magnétique terrestre a pour effet de focaliser le plasma solaire et les particules ionisées de la haute atmosphère de sorte qu'en ces points de focalisation, situés près des pôles, se produisent une élévation de la température et une variation additionnelle de la densité (Jacchia & Slowey [30]). Nous négligerons cependant ces effets.

3. Force exercée sur un satellite. — Déjà à 150 km d'altitude, où la densité n'est pas supérieure à 10^{-12} g/cm^3, le libre parcours moyen des molécules est de l'ordre de 20 m. La force s'exerçant sur un satellite de dimensions égales ou inférieures à cette valeur sera (Epstein [17])

$$\vec{F} = -(c_D\, s\, \rho/2)\sqrt{\vec{v}^2}\,\vec{v}\ , \tag{1-55}$$

où c_D est un coefficient d'ajustement dépendant de la forme du satellite ($c_D \simeq 2$), $\vec{v}$ est la vitesse du satellite par rapport à l'air ambiant, s est la section du satellite projetée dans le plan normal à la direction du mouvement.

Si l'on tient compte de la rotation de l'atmosphère, les composantes de la vitesse v dans le système d'axes s, t et w (fig. 1) sont les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} v_s &= n\,a\,(1-e^2)^{-1/2}\,e\sin f\ ,\\ v_t &= n\,a\,(1-e^2)^{-1/2}\,(1-\varepsilon\cos i)\,p/r\ ,\\ v_w &= n\,a\,(1-e^2)^{-1/2}\sin i\,r/p\,\sin\nu\ , \end{aligned}\right. \tag{1-56}$$

où $\varepsilon = E\,\omega_0\,(1-e^2)^{3/2}/n$, E étant le coefficient d'entraînement de l'atmosphère ($E \simeq 1$).

Les relations (1-55) et (1-56) permettent le calcul des accélérations perturbatrices S, T, W et celui des équations aux variations de Lagrange.

Nous verrons que les perturbations sont importantes si $a \simeq R_0$. Dans ce cas, on a $\varepsilon \simeq 1/17$. Pour cette raison, nous négligerons dans les équations de Lagrange le terme en ε, sauf dans le cas où le terme indépendant de ε est nul.

4. Solution. — Pour l'intégration, il est commode d'utiliser la variable u, l'anomalie excentrique. Nous avons utilisé le modèle symétrique d'atmosphère (1-53) pair en u. Seuls les termes pairs en u des équations aux variations sont à retenir. Dans le cas de ω cependant, le terme unique est impair en u. Nous l'avons retenu pour effectuer l'intégration en tenant compte de l'asymétrie de l'atmosphère au moyen de la relation (1-54). Ainsi, dans les équations aux variations, pour a, e, i et Ω nous écrivons

$$\rho(r) = \rho(a)\exp(2\,A\cos u)\ , \tag{1-57}$$

où $A = a\,e/2\,H$. Dans l'équation aux variations de ω, nous écrivons

$$\rho(r) = \rho_m(a)\left[1+\varphi(a)\cos^6(\Phi/2)\right]\exp(2\,A\cos u)\ , \tag{1-58}$$

où $\cos\Phi = \cos\psi\cos f - \sin\psi\cos\chi\sin f$, ψ est la distance angulaire des droites joignant le centre de la Terre au centre de la protubérance d'une part et au périgée d'autre part (fig. 6), χ est l'inclinaison du plan orbital par rapport au plan contenant les droites précédentes joignant le centre de la Terre au centre de la protubérance d'une part et au périgée d'autre part.

Pour intégrer les équations aux variations, nous avons procédé comme Cook & Plimmer [8] qui utilisent la propriété suivante des fonctions de Bessel :

$$\int_0^{\pi} \exp(2\,A\cos u)\cos \mathrm{n}\,u\,\mathrm{d}u = \mathbf{I}_{\mathrm{n}}(2\,A)\,, \tag{1-59}$$

où

$$\mathbf{I}_{\mathrm{n}}(2\,A) = \sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} \left[A^{\mathrm{n}+2\mathrm{m}}/\mathrm{m}!\,(\mathrm{m}+\mathrm{n})!\right].$$

Aux grandes altitudes ($h \simeq 1\,500$ km), l'échelle de hauteur H est de l'ordre de 250 km. Ainsi, même si l'excentricité est importante (de l'ordre de 0,2), la série $\mathbf{I}_{\mathrm{n}}$ converge assez rapidement. Nous admettrons que H est constant.

L'intégration sur une révolution et au premier ordre par rapport à l'excentricité nous permet de retrouver les résultats de Cook & Plimmer pour a, e, i et Ω et de déterminer les variations de ω :

$$\left.\begin{aligned}
(\mathrm{D}a)/a &= 2\,k'(\mathbf{I}_1 + 2\,e\,\mathbf{I}_2)\,,\\
\mathrm{D}e &= 2\,k'(\mathbf{I}_2 + \tfrac{1}{2}\,e\,\mathbf{I}_1 + \tfrac{1}{2}\,e\,\mathbf{I}_3)\,,\\
\mathrm{D}i &= k'\,\varepsilon\sin i\left[\tfrac{1}{2}\,(\mathbf{I}_1 + \cos 2\,\omega\,\mathbf{I}_3) - 2\,e\cos^2\omega\,\mathbf{I}_2\right],\\
\mathrm{D}\Omega &= \tfrac{1}{2}\,k'\,\varepsilon\sin 2\,\omega\,(\mathbf{I}_3 - 2\,e\,\mathbf{I}_2)\,,\\
\mathrm{D}\omega &= \left[\rho_{\mathrm{m}}(a)\,\varphi(a)/\rho(a)\right](k'/4\,e)\sin\psi\cos\chi\,\times\\
&\quad\times\left[(-3\,\mathbf{I}_1/8)\,(4+\cos^2\psi-\sin^2\psi\cos^2\chi) - (3/2)\cos\psi\,\mathbf{I}_2 +\right.\\
&\quad + (\mathbf{I}_3/2)\,(3+\sin^2\psi\cos^2\chi) + (3/2)\cos\psi\,\mathbf{I}_4 +\\
&\quad\left. + (\mathbf{I}_5/8)\,(3\cos^2\psi - \sin^2\psi\cos^2\chi)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{1-60}$$

où

$$k' = -\pi\,(c_{\mathrm{D}}\,s/m)\,\rho(a)\,a\,.$$

Ces résultats montrent que si le modèle d'atmosphère est stable, le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison diminuent au cours du temps. Les variations de l'argument du périgée et de la longitude du nœud sont périodiques.

Une analyse de la répartition spectrale des variations de la densité (Kaula [33] p. 52) montre que l'amplitude relative des variations de la densité de période de l'ordre de 1 mois peut atteindre 100 %. Il peut ainsi apparaître des variations séculaires par produit de fréquence. Pour tenir compte de cette possibilité, nous posons $\sin 2\,\omega = \sin\psi\cos\chi \simeq 2$.

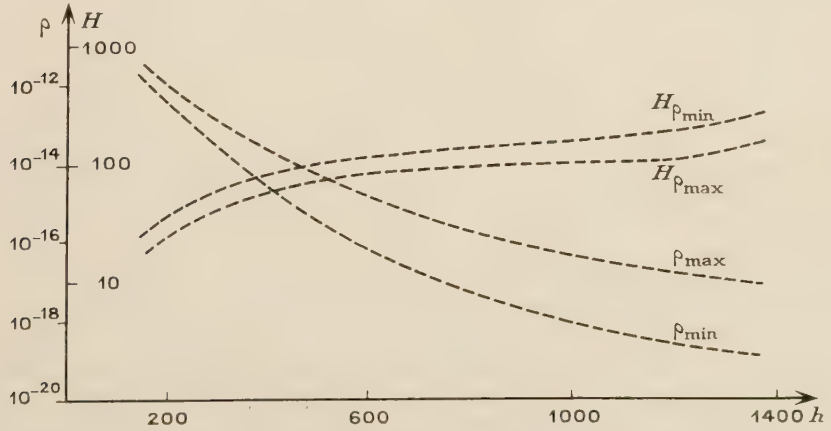


FIG. 7. — Courbe de la densité ρ (g/cm³) et de l'échelle de hauteur H (km), en fonction de l'altitude h (km).

5. Expression approchée des effets du premier ordre. — Pratiquement $a\,e/2\,H \simeq 1$. Si nous ne conservons que les termes les plus importants, les variations séculaires des éléments sont

$$(1\text{-}61) \qquad \dot{a}/a \simeq A^{-1}\,\dot{e} \simeq (\varepsilon \sin i)^{-1}\,\dot{i} \simeq -\varepsilon^{-1}\,\dot{\Omega} \simeq -e\,\dot{\bar{\omega}} \simeq n\,k'/2\,\pi\,.$$

Si nous utilisons les valeurs de ρ et H extrapolées à partir des valeurs expérimentales (Kallmann-Bijl § *al.* [32]) (fig. 7), pour $a = 2\,000$ km, $\rho \simeq 10^{-20}$ g/cm^3 et $H \simeq 1\,000$ km, $n\,k'/2\,\pi$ est de l'ordre de -3×10^{-7} (s/m) rd/an.

Les variations sont ici proportionnelles au facteur s/m. Pour un satellite moyen, $m = 100$ kg et $s = 1$ m^2, s/m est de 10^{-1}. Les effets dus à la résistance de l'air sont donc déjà très faibles si l'altitude du périgée est égale à 2 000 km et sont encore plus faibles si l'altitude est plus grande, d'après l'allure des courbes de la figure 7.

7. **Pression du rayonnement solaire.** — Considérons maintenant les effets de la pression du rayonnement solaire sur le mouvement d'un satellite terrestre. Ces effets peuvent être très importants dans le cas de satellites légers.

Nous rappellerons d'abord les hypothèses généralement admises et l'expression de la force perturbatrice. Cook a calculé la variation des éléments elliptiques, compte tenu de la présence du cône d'ombre porté par la Terre. Nous utiliserons une expression approchée de ces résultats pour évaluer l'ordre de grandeur numérique des perturbations sous l'hypothèse additionnelle que le cône d'ombre est cylindrique.

1. Hypothèse. — On admet généralement que l'intensité de la radiation solaire est constante au cours du temps. Nous conserverons cette hypothèse. Les effets négligés sont alors plus petits que ceux du premier ordre que nous retiendrons.

Certains auteurs négligent les éclipses du satellite par la Terre. Musen [46] montre que, dans ce cas, les variations de longue période sont associées à l'argument $\omega \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \nu_S$, où S se rapporte au Soleil. Les variations de ω et Ω sont dues à l'aplatissement terrestre principalement, aussi on peut calculer les périodes correspondantes à l'aide des relations (1-26). Ces périodes sont de

$$60\,(a/R_0)^2 \left[(3/2)\,(1 - 5\cos^2 i) + \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} 3\cos i \pm 0{,}16\,(a/R_0)^2\right]^{-1} \text{j}$$

et, sauf dans les cas de résonance ($[\ ] = 0$), il n'y a aucun effet séculaire.

Si l'on tient compte des éclipses du satellite, des effets apériodiques apparaissent. Leur décomposition spectrale peut éventuellement admettre une contribution séculaire. Pour cette raison, nous allons évaluer l'ordre de grandeur de ces effets à partir des résultats de Cook [7].

2. Solution. — L'expression de la pression du rayonnement solaire par unité de masse du satellite est la suivante :

$$(1\text{-}62) \qquad F = L_S\,k\,s/4\,\pi\,r_S^2\,m\,c\,,$$

où L_S est l'énergie totale du rayonnement solaire, m la masse du satellite, c la vitesse de la lumière, k un facteur relié au mode de réflexion adopté ($k = 1$ pour une réflexion isotropique, $k = 2$ pour une réflexion totale), $k\,s$ la surface effective du satellite et r_S la distance Terre-Soleil.

Les composantes X, Y et Z de cette accélération sont fonctions des éléments orbitaux du Soleil. Le calcul des composantes S, T et W introduit les éléments orbitaux du satellite. Cook [7] a intégré les équations de Lagrange en considérant ces éléments comme constants. Nous ne donnerons pas le détail de cette solution mais seulement les termes principaux.

3. Expression approchée des effets du premier ordre. — Nous avons utilisé le développement $r = a\,(1 - e^2)\,(1 - e\cos f + \ldots)$ pour retenir les termes d'ordre le moins élevé par rapport à l'excentricité. Ce sont les suivants :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(\mathrm{D}a)/a \simeq (2/n^2\,a)\left[T_\mathrm{P}\,(\sin f)_\mathrm{s}^\mathrm{e} + S_\mathrm{P}\,(\cos f)_\mathrm{s}^\mathrm{e}\right],\\
&\mathrm{D}e \simeq \frac{1}{n^2\,a}\left[T_\mathrm{P}\left(\frac{3f}{2} + \sin f\cos\frac{f}{2}\right)_\mathrm{s}^\mathrm{e} + S_\mathrm{P}\,(\cos^2 f)_\mathrm{s}^\mathrm{e}\right],\\
&\mathrm{D}i \simeq (W/n^2\,a)\left[\sin f + \sin\omega\cos f - 3\,e\cos(f/2)\right]_\mathrm{s}^\mathrm{e},\\
&\mathrm{D}\Omega \simeq (W/n^2\,a\sin i)\,(\sin f - \cos\omega\cos f)_\mathrm{s}^\mathrm{e},\\
&\mathrm{D}\omega \simeq \frac{1}{n^2\,a\,e}\left[S_\mathrm{P}\left(\frac{3f}{2} - \sin f\cos\frac{f}{2}\right)_\mathrm{s}^\mathrm{e} - T_\mathrm{P}\,(\cos^2 f)_\mathrm{s}^\mathrm{e}\right],
\end{aligned}
\right. \qquad (1\text{-}63)
$$

où T_P, S_P, valeurs des composantes T et S au périgée et W sont égales à F multipliée par une fonction des éléments orbitaux du Soleil et du satellite, de l'ordre de 1. Les indices e et s indiquent que l'on doit prendre la différence des valeurs de la parenthèse au début et à la fin de l'éclipse.

Pour une évaluation simple des effets cumulatifs, nous pouvons considérer que l'ombre portée par la Terre a la forme d'un cylindre droit et que les quantités $(f)_\mathrm{s}^\mathrm{e}$, $(\sin f)_\mathrm{s}^\mathrm{e}$ et $(\cos f)_\mathrm{s}^\mathrm{e}$ sont proportionnelles à R_0/a. Nous pouvons également tenir compte de la rotation du plan orbital en considérant que des éclipses se produisent pour la $(R_0/\pi\,a)^\mathrm{me}$ partie du temps seulement. Si nous multiplions les seconds membres de (1-63) par ce coefficient et négligeons les coefficients numériques de l'ordre de 1, il vient

$$\dot{a}/a \simeq \dot{e} \simeq \dot{i} \simeq \dot{\Omega} \simeq e\,\dot{\omega} \simeq F\,R_0/2\,\pi^2\,n\,a^3\,. \qquad (1\text{-}64)$$

L'intensité de la radiation solaire varie légèrement sur une période de 11 ans. A son maximum, l'énergie rayonnée, à la distance Terre-Soleil, est d'environ 2 000 W/m^2. Nous utiliserons cette valeur pour obtenir le module de l'accélération F qui s'exerce sur le satellite : $F \simeq 6\times10^{-5}\,(k\,s/m)$ cm/s^2 et la valeur du second membre de (1-64) : $1{,}2\times10^{-4}\,(k\,s/m)\,(R_0/a)^3$ rd/an.

4. Radiation réfléchie et irradiée. — D'après Byers [4], environ 35 % de la radiation solaire est réfléchie par la Terre, 64 % est absorbée, répartie en latitude et réémise.

En première approximation, nous pouvons considérer que la radiation incidente sur la demi-sphère de surface $2\,\pi\,R_0^2$ est redistribuée sur la sphère de surface $4\,\pi\,a^2$. La force résultante due à cette radiation est alors de l'ordre de $F\,R_0^2/2\,a^2$ et les composantes S, T et W sont respectivement proportionnelles à $F\,R_0/2\,a$, $(F\,R_0/2\,a)\left[e + (R_0/a)\right]$ et $F\,R_0^2/2\,a^2$.

Une simple évaluation des variations produites, à l'aide des équations de Lagrange, nous donne

(1-65) $$\dot{a}/a \simeq (a/R_0)\,\dot{e} \simeq \dot{i} \simeq \dot{\Omega} \simeq e\,(a/R_0)\,\dot{\omega} \simeq F\,R_0^2/4\,n\,a \simeq 6\times10^{-4}\,(k\,s/m)\,(R_0/a)^3 \text{ rd/an}.$$

Ces effets sont du même ordre que les précédents (1-64), mais il est plus difficile de les évaluer avec précision.

5. Conclusion. — Les perturbations dues à la pression de la radiation solaire sont proportionnelles à $k\,s/m$. En pratique, cette quantité peut être aussi faible que 10^{-2} ($k = 1$, $s = 10^4$ cm, $m = 10^3$ kg). Dans un tel cas, les variations cumulatives du nœud par exemple [relations (1-64) et (1-65)] peuvent atteindre 6×10^{-6} rd/an. Cet effet est beaucoup plus faible que ceux dus aux précédents facteurs de perturbation. Il est tout juste supérieur à l'effet relativiste dû à la rotation de la Terre sur elle-même (1-94).

Pour terminer l'examen des perturbations d'origine classique, nous allons maintenant étudier l'influence sur le mouvement d'un satellite des météorites, des particules des ceintures de radiations et du champ électromagnétique.

8. **Météorites, ceintures de radiations, champ électromagnétique.** — Il est impossible de calculer avec précision les effets que nous allons maintenant étudier. Pour cette raison, nous allons nous limiter à une simple évaluation des variations possibles des éléments orbitaux dues à ces facteurs de perturbation.

La perturbation ne se présente pas sous forme analytique. Aussi, nous admettrons, d'après les équations de Lagrange (1-14), que

(1-66) $$\dot{a}/a \simeq \dot{e} \simeq \dot{i} \simeq \dot{\Omega} \simeq e\,\dot{\omega} \simeq F/n\,a\,,$$

où F est le module de l'accélération perturbatrice qui, dans les deux premiers cas (météorites, ceintures de radiations), peut se mettre sous la forme

(1-67) $$F = \frac{k\,s}{m}\int \frac{\mathrm{d}n(b)}{\mathrm{d}b}\,p(b)\,\mathrm{d}b\,,$$

où $\mathrm{d}n(b)/\mathrm{d}b$ est la densité spectrale du flux de particules, $p(b)$ l'impulsion d'une particule, b un paramètre spectral et $k\,s$ la section efficace du satellite.

Nous allons maintenant évaluer F dans chacun des cas.

1. Chocs de météorites. — Nous admettrons que les météorites ont tous la même vitesse v. La valeur de l'accélération du satellite est

(1-68) $$F = \frac{k\,s}{m}\,v\int \frac{\mathrm{d}n(m)}{\mathrm{d}m}\,m\,\mathrm{d}m\,,$$

où $\mathrm{d}n(m)/\mathrm{d}m$ est le flux de météorites de masse comprise entre m et $m + \mathrm{d}m$.

Pour évaluer la grandeur de la force F, nous utilisons les données expérimentales groupées sur la figure 8. Ces courbes nous donnent le flux par centimètre carré et par seconde des particules de masse comprise entre $\sqrt{10}\,m$ et $m/\sqrt{10}$, où m apparaît en abscisse.

Ces données expérimentales diffèrent sensiblement. Si nous intégrons (1-68) sur la courbe en pointillé, moyenne approchée des données relatives au flux de météorites proche de la Terre (courbes 2, 3 et 4), il vient

(1-69) $$\int \frac{\mathrm{d}n(m)}{\mathrm{d}m}\,m\,\mathrm{d}m \simeq 8\times10^{-14}\ \mathrm{g/cm^2.s}\,.$$

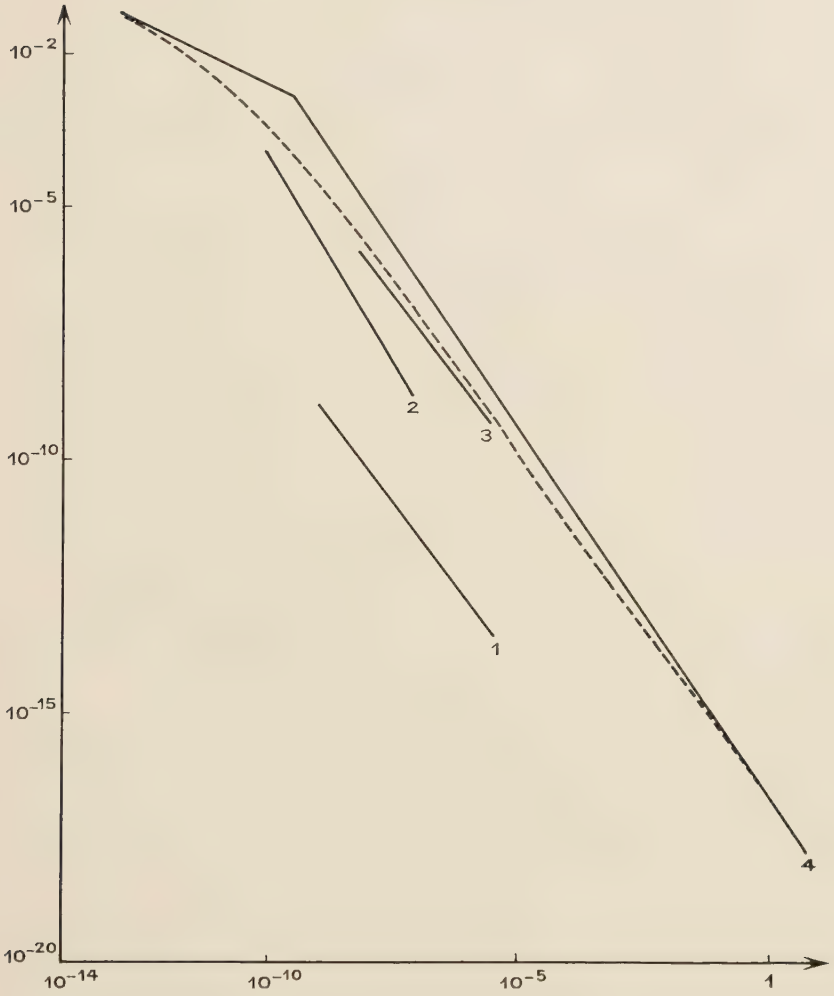


FIG. 8. — En abscisse, masse des météorites en gramme ; en ordonnée, flux des météorites en gramme par centimètre carré et par seconde dans le nuage zodiacal (courbe 1, Beard [2]) et au voisinage de la Terre ($r \simeq R$) : courbe 2, Dubin & McCracken [15] ; courbe 3, Nazarova [47] ; courbe 4, Hawkins [23].

Les météorites ont une vitesse égale ou inférieure à 79 km/s. Cette quantité est la somme des modules de la vitesse du satellite ($\simeq$ 8 km/s), de la vitesse de la Terre sur son orbite ($\simeq$ 29 km/s) et de la vitesse correspondant à l'énergie potentielle d'un météorite dans le champ du Soleil à la distance Terre-Soleil ($\simeq$ 42 km/s). Nous choisirons ici cette limite supérieure comme valeur de v. Dans ces conditions, la valeur de la force F peut être de l'ordre de

$$F \simeq 5{,}8\times10^{-7}\,(k\,s/m)\ \mathrm{cm/s^2} \qquad (1\text{-}70)$$

et la variation résultante des éléments (1-66) de l'ordre de ($k \simeq 1$, $a/R \simeq 1$),

$$\dot{a}/a \simeq \dot{e} \simeq \dot{\bar{i}} \simeq \dot{\bar{\Omega}} \simeq e\,\dot{\bar{\omega}} \simeq 2\times10^{-5}\,(s/m)\ \mathrm{rd/an}\,. \qquad (1\text{-}71)$$

Notons que l'imprécision est ici très grande et qu'il n'est pas exclu que les effets réels soient 10 fois plus grands.

2. Ceintures de radiations. — Si le satellite est proche de la Terre, il traversera les ceintures de radiations de van Allen où la densité des particules ionisées est élevée. Nous évaluerons l'importance des perturbations provoquées par les échanges de quantités de mouvement du satellite dans ce milieu.

L'énergie totale des protons de basse énergie y est plus importante que celle de tout autre groupe de particules. Aussi, nous tiendrons compte de ce seul groupe.

D'après Davis & Williamson [11], le spectre des protons lents a la forme

$$n(E) = n_0 \exp(-E/E_0) , \tag{1-72}$$

où $n(E)$ est le flux total de protons d'impulsion supérieure ou égale à E.

Par dérivation de la relation précédente, on obtient la densité spectrale du flux [pour distinguer du cas précédent, utilisons k^* au lieu de k (1-67)]

$$\frac{\mathrm{d}n(E)}{\mathrm{d}E} = -\,\mathbf{e}\,\frac{n(E_0)}{E_0}\exp\left(-\frac{E}{E_0}\right) . \tag{1-73}$$

La valeur de l'accélération perturbatrice est alors donnée par l'intégrale

$$F = (k^*\, s/m)\;\mathbf{e}\;n(E_0)\,\sqrt{2\,m_\mathrm{p}\,\mathcal{E}} , \tag{1-74}$$

où $\mathcal{E} = \left[\dfrac{1}{E_0}\displaystyle\int \mathrm{d}E\,\sqrt{E}\exp\left(-\frac{E}{E_0}\right)\right]^2$ et m_p est la masse du proton.

Si nous utilisons les valeurs maxima mesurées par Explorer XII (cas A et B)

$$\begin{array}{ll} \text{A} & E_0 = 400\ \text{MeV} ,\quad n(E_0) = 3{,}7\times10^5 , \\ \text{B} & E_0 = \ 64\ \text{MeV} ,\quad n(E_0) = 7{,}3\times10^6 , \end{array} \tag{1-75}$$

les valeurs correspondantes de $\mathcal{E}$, F et de la variation séculaire possible des éléments (1-66) sont

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{A} & \mathcal{E} = 1{,}6\times10^2\ \text{MeV} ,\ F = (k^*\, s/m)\ 2{,}7\times10^{-8}\ \text{cm.s}^{-2} , \\ \text{B} & \mathcal{E} = 3{,}6\times10\ \ \text{MeV} ,\ F = (k^*\, s/m)\ 2{,}5\times10^{-8}\ \text{cm.s}^{-2} , \\ \multicolumn{2}{l}{\dot{a}/a \simeq \dot{e} \simeq \dot{i} \simeq \dot{\Omega} \simeq e\,\dot{\omega} \simeq 10^{-6}\,(k^*\, s/m)\ \text{rd/an} .} \end{array}\right. \tag{1-76}$$

Il est difficile d'évaluer le coefficient de section efficace k^*. D'après Chopra [5], si les flux d'ions et d'électrons sont inégaux, le satellite se charge jusqu'au moment où les flux incidents, modifiés par le potentiel de cette charge, sont égaux.

Appliquons ce raisonnement ici, en admettant pour les électrons une distribution également exponentielle. Si les flux diffèrent d'un facteur x, le potentiel du satellite devra être tel que seules les particules d'énergie supérieure ou égale à $E/E_0 = 1 + \mathrm{Log}\,x$ ne puissent atteindre le satellite. Dans ces conditions, les particules d'énergie E_0, principalement responsables des échanges de quantités de mouvement [comme le montre l'intégration de (1-74)], ne peuvent approcher le satellite à plus de $(E/E_0)\,R_\mathrm{S}$, où R_S est le rayon du satellite. D'où un facteur de section efficace de l'ordre de $(E/E_0)^2$.

Généralement les flux d'ions et d'électrons mesurés sont du même ordre de sorte que nous admettons une valeur de x inférieure ou égale 10. Le facteur k^* est alors aussi inférieur à 10 et les perturbations données par (1-76) restent très faibles.

3. Effets électromagnétiques. — Dans cette évaluation des effets électromagnétiques, nous ne tiendrons pas compte des courants électriques à l'intérieur et à

la surface du satellite. Nous admettrons aussi qu'il est passif (non émetteur) et non conducteur.

Nous venons de voir que sous l'influence des flux d'ions et d'électrons, un satellite acquiert une certaine charge. L'action du champ magnétique terrestre sur cette charge se traduit par une accélération du satellite dont le module est

$$F = C\,V\,H\,v \sin\alpha/m\,, \tag{1-77}$$

où C est la capacité électrique du satellite, V son potentiel, H l'intensité du champ magnétique et α l'angle entre les directions du champ H et de la vitesse v.

Si nous admettons que la capacité d'un satellite sphérique est de l'ordre de celle d'une sphère de même rayon R_s et de pouvoir diélectrique égal à celui du vide ε_0, $C = \varepsilon_0\, 4\,\pi\, R_s$. Compte tenu de la vitesse du satellite sur son orbite, on a

$$F \simeq 6{,}4\times10^{-4}\,(R_s/m)\;V\;H\ \text{cm.s}^{-2}\,, \tag{1-78}$$

où V est exprimé en volts et H en oersteds.

Il est difficile d'évaluer V. Si la contribution énergétique principale provient des ions de 100 MeV environ, le spectre des flux incidents s'étend à des particules de plus faible énergie. Nous admettrons que le potentiel du satellite peut s'élever à quelque 10^4 V. Près de la Terre ($a/R_0 \geqq 1{,}5$), le champ H ne dépasse pas 10^{-2} Oe (Heppener & *al.* [24]). Dans ces conditions on a, d'après (1-66),

$$\dot{a}/a \simeq \dot{e} \simeq \dot{i} \simeq \dot{\Omega} \simeq e\,\dot{\omega} \simeq 2\times10^{-5}\,(R_s/m)\ \text{rd/an}\,, \tag{1-79}$$

où R_s/m peut être aussi petit que 10^{-4} ($R_s = 10^2$ cm, $m = 10^3$ kg).

4. Conclusion. — Dans cette étude, nous avons admis que le satellite est non conducteur et passif (non émetteur). S'il est dense ($s = 10^4$ cm^2, $R_s = 50$ cm et $m = 10^3$ kg), les perturbations dues aux chocs de météorites et de particules des ceintures de radiations sont de l'ordre de 10^{-7} rd/an. L'interaction du champ magnétique terrestre avec la charge induite sur le satellite est environ 100 fois plus faible. Tous ces effets sont plus faibles que les effets relativistes du champ de Schwarzschild et de la rotation de la Terre sur elle-même.

9. **Effets orbitaux relativistes.** — En relativité générale, la répartition énergétique détermine la structure de l'espace-temps. Les équations différentielles du mouvement font intervenir les éléments de cette structure et diffèrent en général de celles qu'introduit la mécanique newtonienne. Les termes additionnels peuvent être considérés comme des forces perturbatrices du mouvement newtonien. Il est alors possible de calculer les composantes S, T et W de ces forces et d'écrire les équations de Lagrange du mouvement.

Pour obtenir les effets relativistes du premier ordre, il nous faut intégrer au premier ordre les équations de Lagrange en considérant les éléments a, e, i comme constants et Ω, ω comme affectés des variations séculaires données en (1-26). Dans ces conditions, la variation totale des éléments est égale à la somme des variations obtenues en ne retenant au second membre des équations de Lagrange qu'un seul groupe de termes (termes en $\mu/r\,c^2$, termes en ω_0, termes où apparaît le spin du satellite, etc.). Pour cette raison nous pourrons évaluer, séparément et à l'aide de résultats connus, les effets relativistes dus au champ terrestre, aux champs lunaire et solaire et à la rotation du satellite sur lui-même.

Rappelons d'abord la solution des équations du champ nécessaire à l'écriture des équations différentielles du mouvement.

1. Métrique. — La structure de l'espace-temps riemannien de la relativité générale est déterminée par la donnée de sa métrique $g_{\mu\nu}$. Celle-ci est solution des équations du champ

(1-80) $$S_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}\,,$$

où $$S_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, G.$$

$G_{\mu\nu}$, tenseur de Ricci, est fonction des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres. $T_{\mu\nu}$, tenseur d'impulsion-énergie, traduit la présence d'une répartition énergétique. (Les indices grecs prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4 ; les indices latins prennent les valeurs 1, 2 et 3).

Dans les cas qui nous intéressent ici, les champs sont faibles ($\mu/c^2 R_0 \ll 1$) et une solution du premier ordre des équations du champ nous suffit. Ecrivons

(1-81) $$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,,$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique minkowskienne (— 1, — 1, — 1, + 1). Si la solution des équations du champ est stationnaire, les quantités $\gamma_{\mu\nu}$ définies par

(1-82) $$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, \eta_{\mu\nu}\, h^{\rho\sigma}\, h_{\rho\sigma}$$

obéissent aux équations (Eddington [16])

(1-83) $$\eta^{ij}\, \partial^2_{ij} \gamma^{\alpha}_{\mu} = -2\chi\, T^{\alpha}_{\mu}$$

et à la condition d'isothermie

(1-84) $$\partial_i \gamma^{i}_{\mu} = 0\,.$$

Les $g_{\mu\nu}$, solutions de ces équations, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, doivent être continues aux frontières spatiales où $T_{\mu\nu}$ est discontinu. A grande distance de toute répartition énergétique, la métrique doit tendre asymptotiquement vers les valeurs minkowskiennes.

Clark [6] a calculé une solution des équations du champ dans le cas où la source en est un solide homogène, aplati et en rotation sur lui-même. Il utilise la définition du tenseur d'impulsion-énergie valable à l'intérieur d'un fluide incompressible

(1-85) $$T^{\mu\nu} = \rho\, (dx^{\mu}/ds)\, (dx^{\nu}/ds) + p^{\mu\nu}$$

et tient compte des composantes les plus importantes de $p^{\mu\nu}$. Si l'axe de rotation se confond avec ox^3, ces composantes sont $p_{11} = p_{22} = p_1$ et $p_{12} = p_{21} = p_2$. Les conditions de continuité à la frontière $r = R_0$ entraînent $p_2 = 0$ et $p_1 = \rho\, \omega_0^2\, (r^2 - R_0^2)/2$.

Nous négligerons dans la solution de Clark les termes du second ordre en ω_0^2 ou fonction de l'aplatissement ε ($\varepsilon = 1/300$ pour la Terre), pour ne retenir que les termes les plus importants :

(1-86) $$\begin{cases} g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\left(1 + \dfrac{2\,\mu}{c^2\, r}\right), \quad g_{44} = 1 - \dfrac{2\,\mu}{c^2\, r}\,, \\ g_{41} = -(4/5)\, \mu\, R_0^2\, \omega_0\, y/r^3\, c^3\,, \quad g_{42} = (4/5)\, \mu\, R_0^2\, \omega_0\, x/r^3\, c^3\,, \\ g_{12} = g_{13} = g_{23} = g_{34} = 0\,. \end{cases}$$

Ces valeurs sont celles de la solution du premier ordre en ω_0 de Lense & Thirring [42]. A partir de cette solution des équations du champ, il est possible de déterminer la valeur des différents effets relativistes dans le mouvement d'un satellite

terrestre. Considérons d'abord le satellite comme ponctuel. Les premiers effets sont dus au champ gravitationnel terrestre.

2. Astre principal fixe. — Si l'astre principal est fixe ($\omega_0 = 0$), la métrique (1-86) se réduit, au premier ordre en $\mu/r\,c^2$, à la métrique isotropique de Schwarzschild :

$$(1\text{-}87) \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\left(1 + \frac{2\,\mu}{c^2\,r}\right), \quad g_{44} = 1 - \frac{2\,\mu}{c^2\,r}.$$

La particule d'épreuve ponctuelle se déplace sur une géodésique telle que

$$(1\text{-}88) \qquad (\mathrm{d}^2x^\mu/\mathrm{d}s^2) + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\,(\mathrm{d}x^\rho/\mathrm{d}s)\,(\mathrm{d}x^\sigma/\mathrm{d}s) = 0\,.$$

Les termes essentiellement relativistes de ces équations sont indépendants de Ω et ω. Pour cette raison nous retrouvons la solution bien connue : l'ellipse dont les éléments a, e, i et Ω sont constants et dont l'argument du périgée ω varie linéairement avec le temps selon la relation

$$(1\text{-}89) \qquad \dot{\omega}_{r1} = J_{r1} = \left[3\,n_0\,\mu/R_0\,c^2\,(1 - e^2)\right](R_0/a)^{5/2}\,.$$

L'introduction des valeurs numériques donne, pour un satellite terrestre,

$$(1\text{-}90) \qquad J_{r1} = 8{,}1\times10^{-5}\,(R_0/a)^{5/2}/(1 - e^2)\ \text{rd/an}\,.$$

A cette variation, s'ajoutent celles dues à la rotation de l'astre central.

3. Rotation de l'astre central. — Au premier ordre en ω_0, la modification du champ gravitationnel sous l'influence de la rotation de l'astre central se traduit par les seules composantes g_{41} et g_{42} (1-86).

Les équations du mouvement (1-88) peuvent se mettre sous la forme

$$(1\text{-}91) \qquad \ddot{x}_i + (x_i/r^3) = X_{ir}\,,$$

où X_{ir} sont les composantes de l'accélération relativiste suivant ox, oy et oz. On en déduit la valeur des composantes S, T et W. La valeur des termes fonctions de ω_0 est la suivante (Lense & Thirring [42], Das [10]) :

$$(1\text{-}92) \qquad \begin{aligned} S &= A\,\cos i\,r^{-4}\,, \qquad T = A\,e\,p^{-1}\cos i\,r^{-3}\sin f\,,\\ W &= A\,\sin i\,r^{-4}\,(e\,p^{-1}\,r\sin f\cos\nu + 2\sin\nu)\,, \end{aligned}$$

où

$$A = (4/5)\,\mu\,\omega_0\,n\,a^2\,R_0^2\sqrt{1 - e^2}\,.$$

Lense & Thirring intègrent les équations de Lagrange en considérant l'argument du périgée ω comme constant lorsqu'il apparaît au second membre (Ω n'apparaît pas). Les variations séculaires obtenues sont indépendantes de ω. Ce résultat indique que les variations séculaires seront les mêmes si l'intégration est effectuée en considérant ω comme variable. Elles seront :

$$(1\text{-}93) \qquad \begin{aligned} &\dot{a}_{r2} = \dot{e}_{r2} = \dot{i}_{r2} = 0\,, \quad \dot{\omega}_{r2} = J_{r2}\,, \quad \dot{\Omega}_{r2} = K_{r2}\,,\\ &J_{r2} = -3\cos i\,K_{r2} = -J_{r1}\,(4\,\omega_0/5\,n_0)\cos i\,\sqrt{R_0/p}\,, \end{aligned}$$

où $n_0 = \sqrt{\mu/R_0^3}$ et J_{r1} est donné en (1-89).

L'introduction des valeurs numériques donne, pour un satellite terrestre,

$$(1\text{-}94) \qquad \dot{\omega}_{r2} = -3\cos i\,\dot{\Omega}_{r2} = 4{,}1\times10^{-6}\cos i\,(R_0/\sqrt{a\,p})^3\ \text{rd/an}\,.$$

Ces effets sont légèrement plus petits que le précédent et décroissent plus rapidement si a augmente.

Pour terminer l'examen des effets relativistes sur le mouvement d'un satellite ponctuel, considérons l'influence des champs lunaire et solaire.

4. Champs lunaire et solaire. — Dans son mouvement de rotation autour de la Terre, un satellite se déplace dans les champs gravitationnels de la Lune et du Soleil. Aux perturbations lunisolaires classiques, s'ajoutent certains effets d'origine relativiste. Pour les calculer, nous avons appliqué les équations de Corinaldesi & Papapetrou au moment angulaire du satellite par rapport au centre de la Terre. Nous faisons abstraction du champ terrestre. Nous admettons que le moment angulaire du satellite se déplace dans le champ de Schwarzschild d'un troisième corps et que sa trajectoire est une géodésique de ce champ (ellipse).

Les équations du moment angulaire (Papapetrou [49], Corinaldesi & Papapetrou [9]) sont les suivantes :

$$(1\text{-}95) \qquad u^\lambda \nabla_\lambda S^{\mu\nu} - u^\mu u_\alpha u^\lambda \nabla_\lambda S^{\alpha\nu} - u^\nu u_\alpha u^\lambda \nabla_\lambda S^{\mu\alpha} = 0 ,$$

où $S^{\mu\nu} = (x^\mu - x_0^\mu)\, T^{\nu 0} - (x^\nu - x_0^\nu)\, T^{\mu 0}$ est le moment angulaire du satellite par rapport au point x_0, où x^ν et $T^{\mu\nu}$ sont les position et impulsion-énergie du satellite considéré comme particule d'épreuve ponctuelle ; ∇_λ désigne la dérivation covariante.

Comme précédemment, il est utile d'expliciter les équations du mouvement (1-95) dans le système $oxyz$ dont la Terre est l'origine et dont l'orientation est fixe par rapport aux étoiles (nous considérons toujours un seul type de perturbations ici relativistes et négligeons les faibles mouvements du repère $oxyz$ dus à la précession terrestre). Schiff [54] a effectué un calcul équivalent dans l'étude des mouvements de l'axe de rotation d'un gyroscope dans le champ de Schwarzschild. Il a explicité les équations (1-95) dans un repère dont le gyroscope est l'origine et dont l'orientation est fixe par rapport aux étoiles.

Ainsi, la variation du vecteur tridimensionnel $\vec{S}_0$ (moment angulaire du satellite dans le repère lié au centre de la Terre) est

$$(1\text{-}96) \qquad \mathrm{d}\vec{S}_0/\mathrm{d}t = (3\,\mu^*/2\,c^2\,r^{*3}) \left[\vec{v}^*\,(\vec{r}^*\,.\,\vec{S}_0) - \vec{r}^*\,(\vec{v}^*\,.\,\vec{S}_0)\right] ,$$

où μ^*, $\vec{r}^*$ et $\vec{v}^*$ sont respectivement la masse, la position et la vitesse du troisième corps. L'effet du champ solaire est ici environ 3×10^3 fois plus important que l'effet du champ lunaire. Nous négligerons ce dernier.

Les variations de $\vec{S}_0$, normal au plan orbital, se traduisent par des variations du nœud et de l'inclinaison. Géométriquement, on a

$$(1\text{-}97) \qquad \mathrm{d}i/\mathrm{d}t = -\,(1/S_0)\,(\mathrm{d}\vec{S}_0/\mathrm{d}t)_\mathrm{t} , \qquad \mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t = (1/S_0 \sin i)\,(\mathrm{d}\vec{S}_0/\mathrm{d}t)_\mathrm{s} ,$$

où $(\mathrm{d}\vec{S}_0/\mathrm{d}t)_\mathrm{s}$ est la projection de $\mathrm{d}\vec{S}_0/\mathrm{d}t$ sur la droite joignant le centre de la Terre au nœud ascendant du satellite et $(\mathrm{d}\vec{S}_0/\mathrm{d}t)_\mathrm{t}$ la projection de $\mathrm{d}\vec{S}_0/\mathrm{d}t$ sur la droite contenue dans le plan orbital du satellite et normale à la précédente.

Exprimons les seconds membres de (1-97) en fonction des éléments de l'orbite du Soleil (indice S) dans le repère $oxyz$. Les moyennes des variations du nœud et de l'inclinaison, moyennes effectuées sur une révolution du Soleil (selon une géodésique), sont

$$(1\text{-}98) \qquad \begin{aligned} \overline{\dot{i}} &= -\,B_{\mathrm{r}3} \sin i_\mathrm{S} \sin(\Omega - \Omega_\mathrm{S}) , \\ \overline{\dot{\Omega}} &= B_{\mathrm{r}3} \left[\cos i_\mathrm{S} - \sin i_\mathrm{S} \operatorname{cotg} i \cos(\Omega - \Omega_\mathrm{S})\right] , \end{aligned}$$

où $$B_{r3} = 3\ \mu_S\ n_S/2\ c^2\ a_S\ (1 - e_S^2) = 0{,}93 \times 10^{-7}\ \text{rd/an}\ .$$

Les variations (1-98) se ramènent à un mouvement instantané de précession du vecteur normal au plan orbital du satellite autour du vecteur normal au plan orbital du Soleil. On peut le constater en adoptant le plan orbital du Soleil comme plan de référence oxy. Dans ce nouveau système (éléments $'$), $i'_S = 0$ et seul subsiste un mouvement séculaire du nœud $d\Omega'/dt = B'_{3r} = B_{3r}$. Ce mouvement de précession a déjà été calculé selon d'autres méthodes par De Sitter [12 à 14], Schouten [55, 56], Fokker [18] et Kramers [39].

Il est possible d'expliquer la concordance du présent résultat avec ceux de Schouten, Fokker et Kramers en montrant que, à l'approximation faite (la trajectoire du moment angulaire est une géodésique), les équations (1-95) se réduisent au simple transport parallèle du quadrivecteur associé au moment angulaire.

Soit le projecteur spatial

(1-99) $$P^\mu_\alpha = \delta^\mu_\alpha - u_\alpha\, u^\mu\ ,$$

où u^μ est le quadrivecteur vitesse du moment angulaire. Les équations (1-95) s'écrivent

(1-100) $$(u^\lambda\, \nabla_\lambda S^{\rho\sigma})^* = P^\rho_\alpha\ P^\sigma_\beta\, u^\lambda\, \nabla_\lambda S^{\alpha\beta} = 0\ .$$

La dérivée du vecteur S_μ associé à la projection spatiale de $S^{\mu\nu}$ par

(1-101) $$S_\mu = \tfrac{1}{2}\, \eta_{\mu\nu\rho\sigma}\, u^\nu\, (S^{\rho\sigma})^*\ ,$$

où $\eta_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g}\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, peut se mettre sous la forme

(1-102) $$u^\lambda\, \nabla_\lambda S_\mu = \tfrac{1}{2}\, \eta_{\mu\nu\rho\sigma} \big[(S^{\rho\sigma})^*\, u^\lambda\, \nabla_\lambda u^\nu + u^\nu\, (u^\lambda\, \nabla_\lambda S^{\rho\sigma})^* + \\ + u^\nu\, (S'^\sigma\, u^\lambda\, \nabla_\lambda u^\rho - S'^\rho\, u^\lambda\, \nabla_\lambda u^\sigma)\big]\ ,$$

où $S'^\rho = u_\lambda\, S^{\rho\lambda}$. Si l'on tient compte de la relation (1-100) l'équation précédente se réduit à

(1-103) $$u^\lambda\, \nabla_\lambda S_\mu = \tfrac{1}{2}\, \eta_{\mu\nu\rho\sigma} \big[(S^{\rho\sigma})^*\, u^\lambda\, \nabla_\lambda u^\nu + u^\nu\, (S'^\sigma\, u^\lambda\, \nabla_\lambda u^\rho - S'^\rho\, u^\lambda\, \nabla_\lambda u^\sigma)\big]\ .$$

Si on admet $u^\lambda\, \nabla_\lambda u^\rho = 0$, on a enfin

(1-104) $$u^\lambda\, \nabla_\lambda S_\mu = 0\ .$$

Ainsi, si on admet que la trajectoire du moment angulaire est une géodésique, les équations (1-95) se réduisent au simple transport parallèle du quadrivecteur associé au moment angulaire, opération équivalente au transport parallèle du repère local qu'effectuent Schouten, Fokker et Kramers le long de la même géodésique.

Examinons, pour terminer, les perturbations de la trajectoire elliptique dues à la rotation d'un satellite sur lui-même.

5. Rotation du satellite sur lui-même. — Les perturbations du mouvement orbital dues à la rotation du satellite sur lui-même se déduisent de l'équation de la particule à spin complémentaire à (1-95) :

(1-105) $$u^\lambda\, \nabla_\lambda (m\, u^\alpha + u_\beta\, u^\lambda\, \nabla_\lambda S^{\alpha\beta}) + \tfrac{1}{2}\, S^{\mu\nu}\, u^\sigma\, R^\alpha_{\nu\sigma\mu} = 0\ ,$$

où $S^{\mu\nu}$ est le tenseur de spin du satellite par rapport à son centre de gravité, u^λ est le quadrivecteur vitesse du satellite, $R^\alpha_{\nu\sigma\mu}$ est le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel.

Das [10] a montré que, dans le champ de Lense-Thirring (1-86), le mouvement du corps d'épreuve n'a lieu dans un plan que si les moments angulaires du corps

central et du satellite sont parallèles ou antiparallèles. A l'aide des équations aux variations de Lagrange, il calcule la contribution de la rotation du satellite sur lui-même au mouvement du périgée :

$$\dot{\omega}_{r4} = 6\, n^2\, \omega_S\, R_S^2/5\, \pi\, c^2\, (1 - e^2)^{3/2}\ ,$$

où R_S est le rayon du satellite et ω_S la composante du spin du satellite normale au plan de l'orbite.

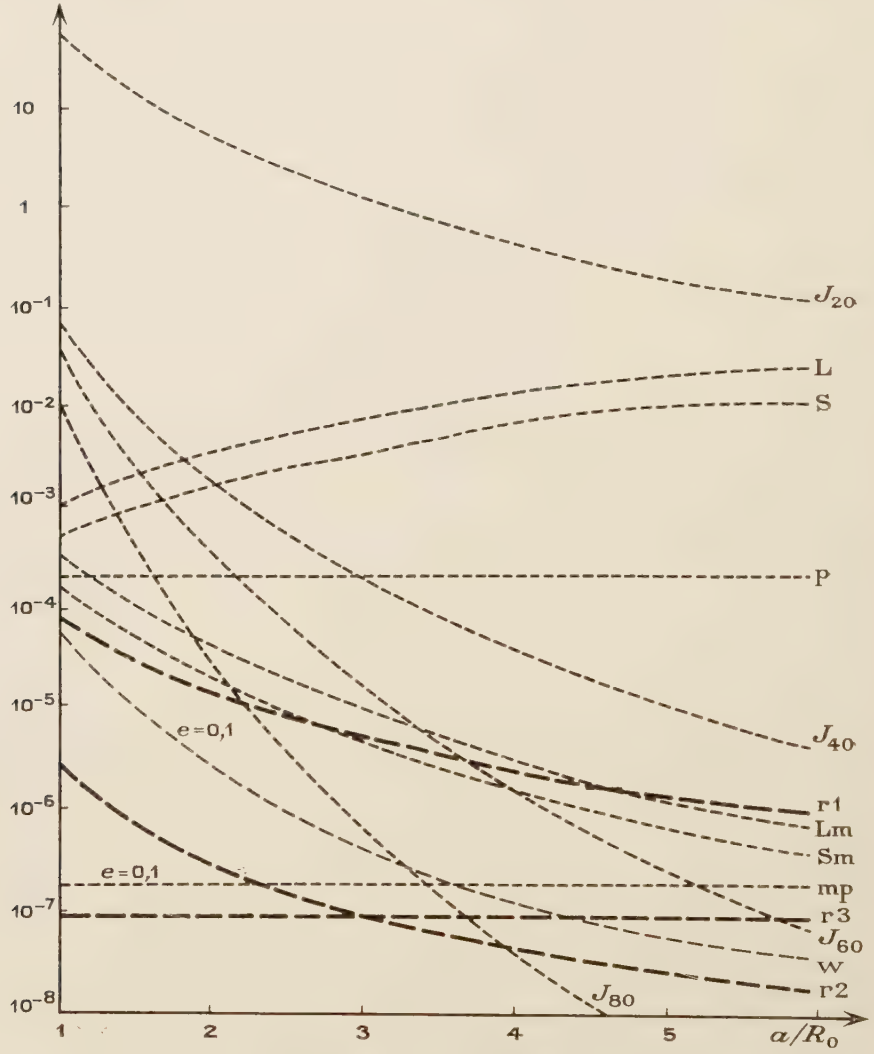


FIG. 9. — En ordonnée, variation séculaire du périgée en radians par an, pour $i = 0$; en abscisse, demi-grand axe de l'orbite en rayons terrestres. Effets relativistes du champ de Schwarzschild (r1), dû à la rotation de la Terre (r2), du champ solaire (r3). Effets classiques dus à l'aplatissement terrestre ($J_{20} - J_{80}$), aux champs lunaire (L) et solaire (S), aux marées lunaires (Lm) et solaires (Sm), à la pression de la radiation solaire (w), aux chocs de météorites et de particules (mp), à la précession de l'axe de rotation terrestre (p).

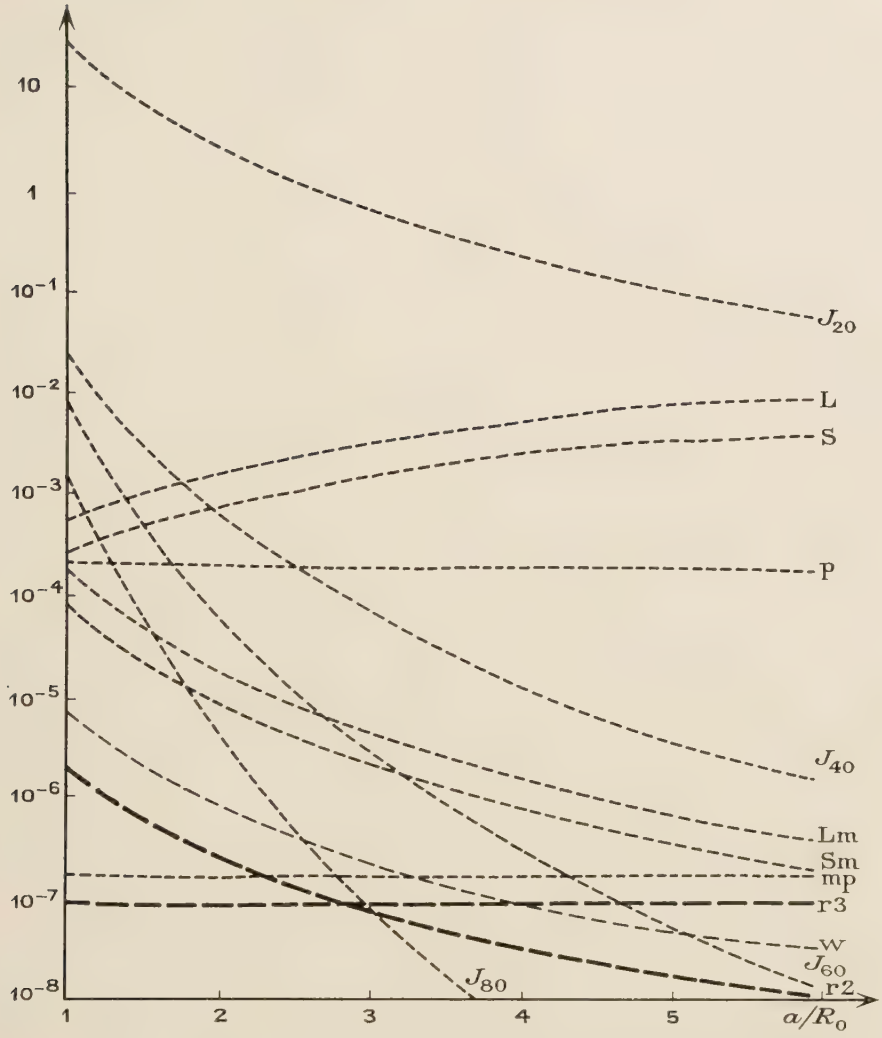


FIG. 10. — En ordonnée, variation séculaire du nœud en radians par an, pour $i \simeq 60°$; en abscisse, demi-grand axe de l'orbite en rayons terrestres. Effets relativistes dus à la rotation de la Terre (r2), du champ solaire (r3). Effets classiques dus à l'aplatissement terrestre ($J_{20} - J_{80}$), aux champs lunaire (L) et solaire (S), aux marées lunaires (Lm) et solaires (Sm), à la pression de la radiation solaire (w), aux chocs de météorites et de particules (mp), à la précession de l'axe de rotation terrestre (p).

Si le rayon et la vitesse de rotation du satellite sur lui-même sont respectivement de 10^3 cm et 10 rd/s, le mouvement du périgée est de 6×10^{-13} rd/an.

Etant donné l'ordre de grandeur de ces effets très petits par rapport aux variations d'origine classique, il ne nous semble pas nécessaire de pousser plus loin l'analyse de ces perturbations relativistes.

10. **Discussion des résultats.** — Dans ce troisième chapitre, nous avons étudié les perturbations classiques et relativistes du mouvement d'un satellite terrestre. Nous avons vu que dans le cas général (inclinaison différant de 90° et de 63° 26′), les perturbations de l'orbite sont dues principalement à l'aplatissement terrestre. Elles consistent en une rotation du plan orbital autour de l'axe de rotation terrestre [mouvement séculaire du nœud (1-26)] et en un mouvement du périgée dans le plan de l'orbite [relation (1-26)].

Nous avons vu également que lorsqu'existe cet important mouvement séculaire du nœud, seuls l'argument du périgée et la longitude du nœud présentent des variations séculaires d'origine relativiste [relations (1-89), (1-93) et (1-98)].

Afin de comparer dans le cas général ($i \neq 90°$, $i \neq 63° 26'$) les différentes perturbations classiques et relativistes des deux éléments ϖ et Ω, nous avons tracé des courbes donnant la valeur de ces perturbations de l'orbite pour des valeurs du demi-grand axe comprises entre R_0 et 6 R_0 (fig. 9 et 10).

a) Nous admettons que les rapports s/m et R_s/m sont respectivement de 10^{-2} et 10^{-4} (CGS) [s, R_s et m sont les section, rayon et masse du satellite].

b) Les mouvements séculaires du périgée sont valables pour l'orbite équatoriale, ceux du nœud pour une orbite dont l'inclinaison est proche de 60°. Dans ce dernier cas, les valeurs sont calculées à l'aide de la solution de Kosai [37].

Ces courbes montrent que, quelles que soient la valeur du demi-grand axe et les caractéristiques du satellite (s/m, R_s/m), certains effets classiques sont très supérieurs aux effets relativistes. Il est certes possible de choisir une valeur de l'inclinaison pour laquelle les effets les plus importants (aplatissement terrestre) sont très faibles mais, comme nous le verrons dans le chapitre IV, ou bien ces valeurs de l'inclinaison sont inacceptables ou bien les erreurs dans les prévisions sont alors très importantes en valeur absolue.

Pour cette raison, nous devons signaler l'intérêt de choisir une orbite stable ($\Omega - \Omega_s \simeq$ Cte) qui rende cumulatif l'effet relativiste (1-98) du champ solaire sur l'inclinaison de l'orbite. En effet, comme nous l'avons déjà vu [relation (1-26)], l'aplatissement terrestre ne produit aucune variation séculaire de l'inclinaison et, de cette façon, cet effet sera comparativement plus facile à mettre en évidence que les autres effets relativistes.

Nous allons examiner les conditions de stabilité de l'orbite et les perturbations de l'inclinaison dans ce cas précis.

Stabilité. — Nous ne tiendrons compte ici que des effets gravitationnels et des effets dus à la précession de l'axe de rotation terrestre. Nous négligeons les « effets de chocs » (air, rayonnement solaire, météorites, particules des ceintures de radiations et champ électromagnétique). Cette approximation est très valable ici car, ainsi que nous le verrons, les variations résiduelles de l'orbite quasi stable sont de l'ordre de $\dot{i} \simeq 10^{-4}$ rd/an, $\dot{\Omega} \simeq 10^{-2}$ rd/an. En nous référant aux relations (1-61), (1-64), (1-71), (1-76) et (1-79), nous pouvons vérifier que si les quantités s/m et R_s/m ne dépassent pas 10^{-2} et 10^{-4} (CGS) [$m = 10^3$ kg, $s = 1$ m^2], les « effets de chocs » sont 20 fois plus faibles que les variations résiduelles de l'orbite choisie. Ainsi, la précision conservée est bien suffisante pour une étude approchée de la stabilité de cette orbite.

Nous pouvons évaluer les perturbations gravitationnelles et les effets de précession de l'inclinaison et du nœud à l'aide des relations approchées obtenues précédemment.

Nous nous plaçons immédiatement dans le cas où l'inclinaison initiale est proche de 90°. Pour évaluer les mouvements du nœud dus à l'aplatissement terrestre, nous utilisons encore le terme du premier ordre en $J_{2,0}$ seulement (1-26). Ceci est possible car, de même que ce terme du premier ordre, les termes d'ordre supérieur en $J_{2,0}$ possèdent cos i en facteur (Kosai [37], Giagaglia [20]). Le terme du premier ordre (1-26) demeure ainsi le plus important même si $i \to 90°$ et nous donne toujours une valeur approchée des mouvements du nœud qui sont très faibles dans ce cas (environ 30 cos i rd/an).

Dans le repère choisi ($oxyz$ défini au début du chap. I), la longitude du nœud de l'orbite solaire est toujours nulle. L'inclinaison de cette orbite solaire est de 23° 26′. A cause de la rotation du plan orbital de la Lune dans le plan de l'écliptique (période de 18 ans), l'inclinaison de l'orbite lunaire et la longitude du nœud oscillent

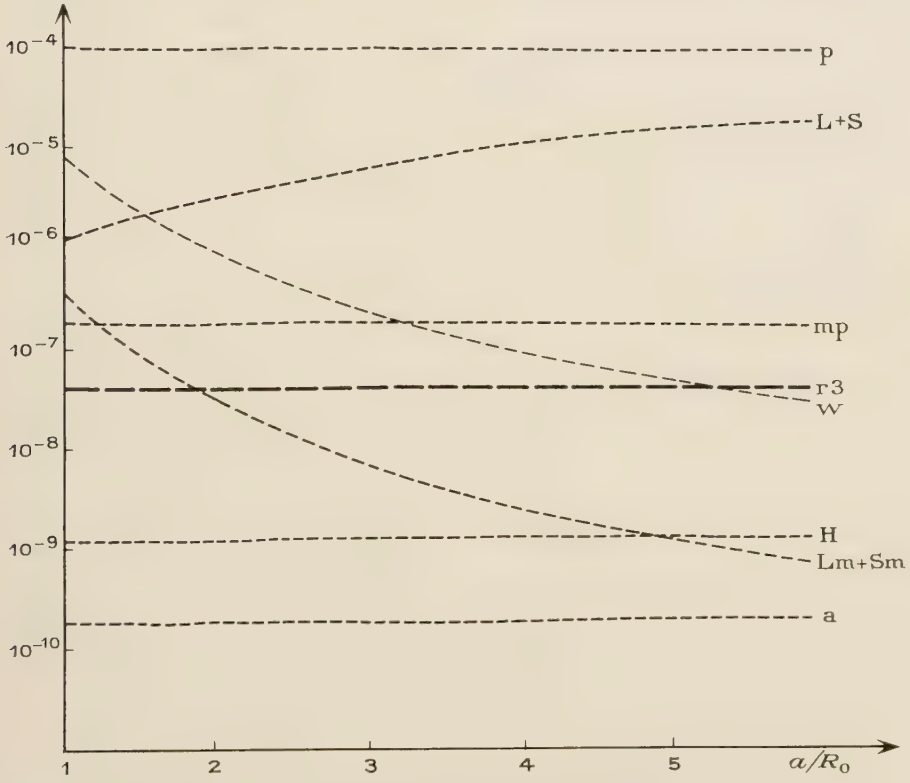


Fig. 11. — En ordonnée, variation cumulative de l'inclinaison en radian par an ; en abscisse, demi-grand axe de l'orbite en rayons terrestres. Effets relativistes du champ solaire (r3). Effets classiques dus aux champs lunaire et solaire (L + S), aux marées lunaires et solaires (Lm + Sm), à la pression de la radiation solaire (w), aux chocs de météorites et de particules (mp), à la précession de l'axe de rotation terrestre (p), au champ magnétique terrestre (H).

autour des valeurs 23° 26′ et 0°. L'amplitude de ces oscillations est de 5° 8′ et 14°. Nous choisirons Ω de telle sorte que l'on ait

$$(1\text{-}106)\quad \int_0^{2\pi} \left[(I'_{2S}/I'_{2L})\sin 2(\Omega - \Omega_S) + \sin 2(\Omega - \Omega_L)\right](dt/d\Omega_L)\, d\Omega_L \leqq 10^{-2},$$

où

$$\Omega_L = \text{arc tg}\left[(\sin \boldsymbol{i}_L \sin \boldsymbol{\Omega}_L/\cos \boldsymbol{i}_L \sin i_S) + \sin \boldsymbol{i}_L \cos i_S \cos \boldsymbol{\Omega}_L\right],$$

$$I'_{2S} = I_{2S} + I_{2Sm}, \qquad I'_{2L} = I_{2L} + I_{2Lm},$$

Les angles en caractères gras, mesurés par rapport au plan de l'écliptique, nous sont donnés par l'observation. La détermination de Ω peut se faire à partir des variations calculées en admettant cette condition (1-106).

Nous pouvons négliger les perturbations gravitationnelles des autres planètes. Les plus importantes sont dues à Jupiter et sont de l'ordre de 10^{-7} rd/an. Avec les hypothèses précédentes, les termes les plus importants de la somme des variations gravitationnelles et des effets de précession sont

$$(1\text{-}107)\quad \dot{i} = I_{2pn}, \quad \dot{\Omega} = K_z \cos i + K'_{1L}\cos(\Omega - \Omega_L) + K'_{1S}\cos(\Omega - \Omega_S),$$

où

$$K'_{1L} = K_{1L} + K_{1Lm}, \qquad K'_{1S} = K_{1S} + K_{1Sm}.$$

Par conséquent, si l'inclinaison initiale peut être choisie avec une incertitude de 10^{-3} rd ($90° \pm 10^{-3}$ rd), l'inclinaison reste de $90° \pm 2\times10^{-3}$ pendant une durée aussi longue que 10 ans ($K_{pn} \simeq 10^{-4}$ rd/an). La variation de Ω pendant cette période reste inférieure à 10^{-1} rd si la valeur du demi-grand axe est comprise entre 2,5 et 3,6 R_0. Ainsi, l'orbite est sensiblement stationnaire et l'effet relativiste, cumulatif, est plus important. Les courbes de la figure 11 permettent de le comparer aux effets classiques. Nous pouvons constater que le mouvement relativiste de l'inclinaison est relativement beaucoup plus important que ceux du périgée et du nœud.

Dans ce troisième chapitre nous avons déduit des expressions approchées des perturbations classiques et relativistes du mouvement d'un satellite terrestre. Les courbes tracées d'après ces expressions approchées montrent que certains effets classiques sont plus grands que les effets relativistes. Nous allons maintenant examiner les possibilités d'observation de ces effets relativistes.

IV. **Conditions d'une vérification**

Dans le chapitre précédent, nous avons donné la valeur des variations séculaires du premier ordre des éléments elliptiques pour chacun des facteurs de perturbation considérés. Il nous est maintenant possible d'expliciter les conditions

$$(1')\qquad \sum_k \left[\partial(\dot{\bar{c}}_i)_k/\partial c_n\right] E(c_n) \leqq x\, 10^{-2}\, (\dot{\bar{c}}_i)_{rk},$$

$$\left[\partial(\dot{\bar{c}}_i)_m/\partial p_m\right] E(p_m) \leqq x\, 10^{-2}\, (\dot{\bar{c}}_i)_{rk},$$

où $(\dot{\bar{c}}_i)_m$ est la variation séculaire du premier ordre de l'élément c_i (a, e, i, ...) fonction du paramètre de perturbation p_m ($J_{2,0}$, μ^*/a^{*2}, ...). $(\dot{\bar{c}}_i)_{rk}$ est l'effet relativiste considéré, x l'imprécision éventuelle de l'observation de cet effet. Ces conditions portent sur la précision de la mesure des éléments orbitaux c_n et sur la précision des paramètres p_n caractérisant les facteurs de perturbation.

Nous expliciterons les conditions (1′) pour les mouvements séculaires du nœud,

du périgée et de l'inclinaison, car les effets relativistes séculaires (ou cumulatifs dans le cas de l'inclinaison) concernent ces seuls éléments de l'orbite.

Pour discuter les possibilités actuelles de satisfaire ces conditions, nous devons connaître les erreurs probables $E(c_n)$ et $E(p_n)$. Précisons tout de suite leur valeur.

1. **Erreurs probables.** — Seuls les éléments a, e et i interviennent dans les termes séculaires $\dot{c}_i$ que nous avons calculés dans le chapitre précédent. Nous adopterons $E(i) = \pm 0{,}5\times10^{-6}$, $E(e) = \pm 10^{-5}$, $E(a)/a = \pm 10^{-7}$, ce qui correspond aux possibilités actuelles pour des mesures effectuées sur une longue période.

Nous utiliserons les marges d'erreur déjà données dans le troisième chapitre pour les paramètres des perturbations suivantes : *a*) perturbations gravitationnelles, *b*) effet de la précession et de la nutation de l'axe de rotation terrestre.

L'évaluation précise des effets de chocs est difficile, l'erreur relative y est grande. A cause des diverses variations locales de la densité de l'air, il est impossible de connaître sa valeur avec une bonne précision, en un instant et en un point donné. Pour cette raison, nous admettrons que l'erreur probable sur le calcul de l'effet théorique est du même ordre que l'effet lui-même [relation (1-61)].

Il est possible d'évaluer avec une incertitude relative de 10 % environ (précision du facteur de réflexion du satellite), l'effet direct de la pression de radiation solaire. L'effet indirect dû à la lumière réfléchie est cependant plus difficile à évaluer. Pour cette raison, nous supposerons également que l'erreur relative sur cet effet est de 100 % de sorte que l'erreur probable dans le calcul des effets de la pression de radiation solaire a la même valeur que l'effet indirect et nous est donné par la relation (1-65).

Les autres effets de chocs nous sont beaucoup plus mal connus, de sorte qu'il est nécessaire d'affecter leur évaluation (1-71), (1-76) et (1-79) d'un coefficient d'erreur relative de 1 000 %.

La somme des erreurs individuelles des effets de chocs est alors

$$E(\dot{i}) \simeq E(\dot{\Omega}) \simeq e\,E(\dot{\omega}) \simeq 3\times10^{-4}\ (s/m)\ \text{rd/an}\ . \qquad \text{(1-108)}$$

Nous retiendrons cette valeur pour l'erreur probable dans la prévision des effets classiques de chocs.

Précisons maintenant les conditions d'observation des mouvements séculaires du périgée (1-89), (1-94), du nœud (1-94) et de l'inclinaison (1-98). Il nous suffit d'expliciter les conditions (1′) et (2′) à l'aide des termes de perturbation retenus au chapitre III. Notons que pour expliciter la condition

$$\sum_k \left[\partial(\dot{c}_i)_k/\partial c_n\right] E(c_n) \leqq x\ 10^{-2}\,(\dot{c}_i)_{rk}$$

nous devons évaluer les dérivées correspondant à chacun des facteurs de perturbation. Cette somme se réduira généralement à un seul terme, beaucoup plus important que les autres et qui sera, dans la plupart des cas, la dérivée des effets en $J_{2,0}$ dus à l'aplatissement terrestre.

Examinons successivement les conditions relatives aux trois effets relativistes précités.

2. **Mouvements relativistes du périgée.** — Nous avons vu précédemment

(§ III.10) qu'il était avantageux de choisir une orbite polaire ($i \simeq 90^\circ$). Dans ce cas, le champ solaire produit une variation cumulative de l'inclinaison d'origine relativiste.

Nous nous intéressons maintenant aux mouvements relativistes du périgée. Le choix d'une orbite équatoriale ($i \to 0$) présente alors les avantages suivants : l'erreur probable des prévisions liée aux possibilités de la mesure de l'inclinaison est multipliée par sin i ; si $i \to 0$, l'erreur probable tend donc elle-même vers 0 ; l'effet relativiste dû à la rotation de la Terre n'est pas nul (ce qui serait le cas pour $i = 90^\circ$).

1. Effet de Schwarzschild. — Les conditions d'observation du mouvement séculaire du périgée dû au champ de Schwarzschild (1-103) sont alors les suivantes ($i \to 0$) :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
E(i) \leqq (\mathrm{x}/i)\, 10^{-2}\, J_{\mathrm{r}1}/4\, (K_z + J_z)_{i=0} \leqq (\mathrm{x}/i)\, 3{,}2\times 10^{-9}\, p/R_0\ , \\
E(e) \leqq \mathrm{x}\, 10^{-2}\, J_{\mathrm{r}1}/4\, e\, (1 - e^2)\, (K_z + J_z)_{i=0} \\
\qquad \leqq \mathrm{x}\, 3{,}2\times 10^{-9}\, (1 - e^2)\, p/R_0\, e\ , \\
E(a)/a \leqq (8\ \mathrm{x}/7)\, 10^{-2}\, J_{\mathrm{r}1}/4\, (K_z + J_z)_{i=0} \leqq \mathrm{x}\, 3{,}7\times 10^{-9}\, p/R_0\ , \\
E(J_{\mathrm{n}0}) \leqq 3\times 10^{-2}\ \mathrm{x}\ p^{n-1}/c_{\mathrm{n}}\, c^2 \leqq \mathrm{x}\, (2{,}1/c_{\mathrm{n}})\, 10^{-11}\, (p/R_0)^{n-1}\ , \\
E(\mu^*/a^{*3})/(\mu^*/a^{*3}) \leqq \mathrm{x}\, 10^{-2}\, J_{\mathrm{r}1}/2\, B_{\mathrm{t}} \leqq \mathrm{x}\, 1{,}07\times 10^{-3}\, \sqrt{R_0^8/p\, a^7}\ , \\
E(k)/k \leqq \mathrm{x}\, 10^{-2}\, J_{\mathrm{r}1}/2\, (B_{\mathrm{Sm}} + B_{\mathrm{Lm}}) \leqq \mathrm{x}\, 1{,}07\times 10^{-3}\, \sqrt{a^3/p\, R_0^2}\ , \\
E(\dot{\psi})/\dot{\psi} \leqq \mathrm{x}\, 10^{-2}\, J_{\mathrm{r}1}/K_{\mathrm{pn}} \leqq \mathrm{x}\, 4\times 10^{-3}\, (R_0/a)^{5/2}\ , \\
s/m \leqq e\ \mathrm{x}\, 2{,}6\times 10^{-3}\, (R_0/a)^{5/2}\ \mathrm{cm}^2.\mathrm{g}^{-1}\ , \\
E(\bar{\varpi})_0 \leqq \mathrm{x}\, 0{,}8\times 10^{-6}\, \sqrt{R_0^5/a^3\, p^2}\ \mathrm{rd/an}\ .
\end{array}
\right. \qquad (1\text{-}109)
$$

2. Rotation de l'astre central. — Les conditions d'observation d'un mouvement du périgée dû à la rotation de la Terre sur elle-même s'obtiennent en multipliant les seconds membres des conditions précédentes (1-109) par le facteur [relations (1-89), (1-93)]

$$(J_{2\mathrm{r}} + K_{2\mathrm{r}})_{i=0}/J_{1\mathrm{r}} = 3{,}26\times 10^{-2}\, \sqrt{R_0/p}\ . \qquad (1\text{-}110)$$

3. Discussion. — Pour examiner les possibilités actuelles d'observation de ces mouvements relativistes du périgée, nous avons tracé (fig. 12) les courbes d'erreur des prévisions théoriques en fonction du demi-grand axe, l'effet relativiste étant pris comme unité [en évaluant 10^{-2} x dans les relations (1-109) à partir des valeurs actuelles des erreurs probables $E(i)$, $E(a)$, ...]. Nous avons utilisé les marges d'erreur déjà données pour les paramètres des facteurs de perturbation. L'erreur probable actuelle dans la mesure des éléments orbitaux est donnée au paragraphe IV.1.

Nous pouvons constater que la précision sur les éléments de l'orbite et des paramètres des facteurs de perturbation est beaucoup trop faible pour que l'on puisse espérer mettre en évidence actuellement des effets relativistes.

3. **Mouvement relativiste du nœud.** — Nous admettrons, dans ce second cas, que l'inclinaison est proche de 90°. Le principal avantage de ce choix réside dans

le fait que l'erreur dans les prévisions due à l'imprécision des coefficients $J_{n,0}$ est multipliée par cos i et ainsi plus faible si $i \to 90^{\circ}$.

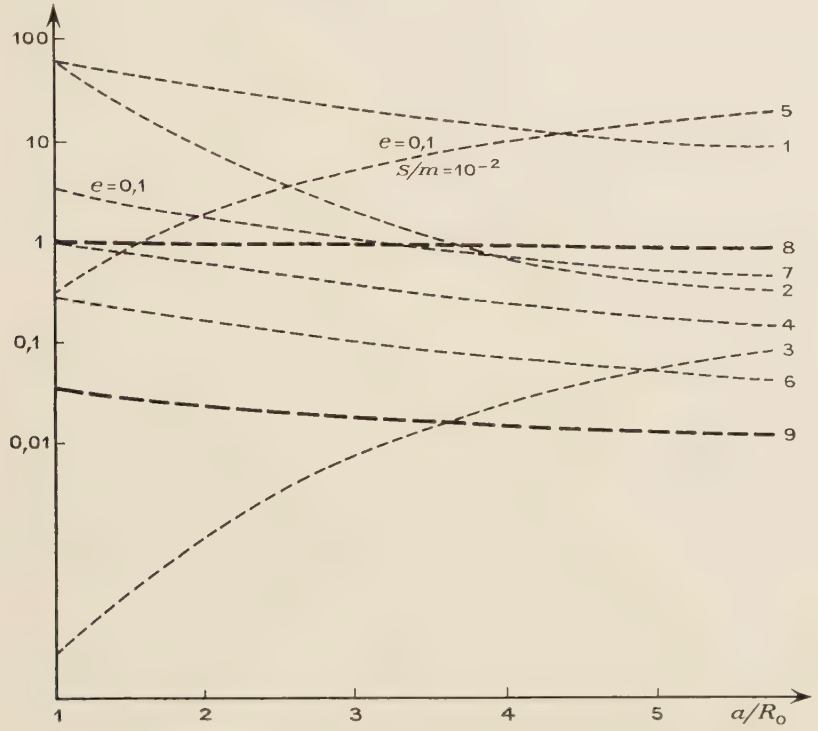


FIG. 12. — Mouvement séculaire du périgée ($i = 0$). Imprécision des prévisions théoriques $E(\dot{\varpi})_t$ due à l'erreur probable sur la valeur des paramètres de perturbation $J_{2,0}$ (courbe 1), $J_{4,0}$ (courbe 2), μ_L/a_L^3 (courbe 3) et k_{Love} (courbe 4), des effets de chocs (courbe 5), des éléments orbitaux a (courbe 6) et e (courbe 7) ; effets relativistes du champ de Schwarzschild [choisi comme unité] (courbe 8), dû à la rotation de la Terre sur elle-même (courbe 9) ; en abscisse, demi-grand axe de l'orbite en rayons terrestres.

1. Rotation de l'astre central. — Le mouvement relativiste du nœud dû à la rotation de l'astre central nous est donné par la relation (1-93). Le calcul des conditions (1′) et (2′) donne, dans ce cas,

$$
\left|\begin{aligned}
&E(i) \leqq \mathrm{x}\ 10^{-2}\ K_{r2} \cos i/K_z \leqq \mathrm{x}\ 2{,}6\times10^{-10}\ p/R_0\ ,\\
&E(e) \leqq \mathrm{x}\ 10^{-2}\ K_{r2}/e\left[4\ K_z\,(1-e^2)^{-1} + (B_L + B_S)\ 3 \sin 2\ i^*\right]\\
&\qquad \leqq (\mathrm{x}/e)\ 1{,}1\times10^{-5}\ R_0^{9/2}/p\ a^{7/2}\left[1 + (2\times10^5 \cos i\ R_0^{7/2}/a^2\ p^{3/2})\right],\\
&E(a)/a \leqq \mathrm{x}\ 10^{-2}\ K_{r2}\Big/\left[2\ K_z + \frac{3}{2}\sin 2\ i^*\ (B_L + B_S)\right]\\
&\qquad \leqq \mathrm{x}\ 2{,}2\times10^{-5}\ R_0^{9/2}/p\ a^{7/2}\left[1 + (2\times10^5 \cos i\ R_0^{7/2}/p\ a^{5/2})\right],\\
&E(J_{2,0}) \leqq \mathrm{x}\ 10^{-2}\ J_{2,0}\ K_{r2}/K_z \leqq \mathrm{x}\ 2{,}6\times10^{-13}\ p/R_0 \cos i\ ,\\
&E(J_{4,0}) \leqq \mathrm{x}\ 4\times10^{-2}\ J_{2.0}\ K_{r2}/15\ K_z\ p^2\\
&\qquad \leqq (\mathrm{x}/\cos i)\ 0{,}8\times10^{-13}\ (p/R_0)^{5/2},
\end{aligned}\right. \qquad \text{(1-111)}
$$

$$
(1\text{-}111)\quad
\begin{cases}
E(\mu^*/a^{*3})/(\mu^*/a^{*3}) \leqq \text{x } 10^{-2}\, K_{r2}/B_t \sin 2\, i^* \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \leqq \text{x } 2{,}3\times 10^{-5}\, R^{3/2}/a\sqrt{p}\,, \\
E(k)/k \leqq \text{x } 10^{-2}\, K_{r2}\, a^5/3{,}1\, B_S \sin 2\, i^* \leqq \text{x } 1{,}5\times 10^{-5}\, (a/R_0)^{7/2}\,. \\
E(\dot\psi)/\dot\psi \leqq \text{x } 10^{-2}\, K_{r2}/K_{pn} \leqq \text{x } 0{,}62\times 10^{-4}\, (R_0/\sqrt{a\,p})^3\,, \\
\quad s/m \leqq \text{x } 4{,}4\times 10^{-5}\, R_0/a\,, \\
E(\dot\Omega)_0 \leqq \text{x } 10^{-2}\, K_{r2} \leqq \text{x } 1{,}4\times 10^{-8}\, (R_0/\sqrt{a\,p})^3\,.
\end{cases}
$$

2. Effet relativiste du champ solaire. — Les conditions d'observation de l'effet relativiste de précession s'obtiennent en multipliant les seconds membres des conditions précédentes par le rapport $\dot\Omega_{r3}/\dot\Omega_{r2}$ [relations (1-94) et (1-98)] :

$$
(1\text{-}112)\qquad A(\sqrt{a\,p})^3 = 6{,}8\times 10^{-2}\,(\sqrt{a\,p}/R_0)^3\,.
$$

Cette quantité est égale à 1 pour $a \simeq 2{,}5$ rayons terrestres.

3. Discussion. — L'importance des erreurs est ici relativement plus grande que dans le cas précédent (mouvement du périgée). Nous pouvons constater par exemple que, pour qu'une observation du mouvement relativiste du nœud dû à la rotation de la Terre avec une incertitude de 10 % soit possible, la marge d'erreur dans la mesure de l'inclinaison [relations (1-111)] devrait être de l'ordre de $2{,}6\times 10^{-9}$. Actuellement, elle est de $0{,}5\times 10^{-6}$ rd et ainsi beaucoup trop grande pour que l'observation d'un tel effet soit réalisable.

4. **Mouvement de l'inclinaison.** — Nous admettons maintenant que l'inclinaison est proche de 90° ($\pm 10^{-3}$ rd). Nous avons vu (§ III.10) qu'un tel choix entraîne une stabilité relative de l'orbite de sorte que l'effet relativiste de précession est cumulatif (pour une période de l'ordre de 10 ans).

Les conditions (1′) et (2′) s'écrivent, dans le cas présent,

$$
(1\text{-}113)\quad
\begin{cases}
E(i) \leqq \text{x } 10^{-2}\, B_{r3} \sin i_S/B_t \sin 2\, i^* \leqq \text{x } 4{,}2\times 10^{-7}\,\sqrt{p}\; R_0^{3/2}/a^2\,, \\
E(e) \leqq \text{x } 10^{-2}\, B_{r3} \sin i_S(\simeq 10^{+2})/B_t \sin^2 i^*\, e \\
\qquad \leqq \text{x } 2{,}5\times 10^{-4}\,\sqrt{p}\; R_0^{3/2}/a^2\,, \\
E(a)/a \leqq \text{x } 2\times 10^{-2}\, B_{r3} \sin i_S(\simeq 10^{+2})/3\, B_t \sin^2 i^* \\
\qquad \leqq \text{x } 1{,}6\times 10^{-4}\,\sqrt{p}\; R_0^{3/2}/a^2\,, \\
E(\Omega) \leqq \text{x } 10^{-2}\, B_{r3} \sin i_S/2\, I_{2t} \leqq \text{x } 1{,}5\times 10^{-6}\, R_0^{3/2}/a\sqrt{p}\,, \\
E(\mu^*/a^{*3})/(\mu^*/a^{*3}) \leqq \text{x } 10^{-2}\, B_{r3} \sin i_S(\simeq 10^{+2})/I_{2L} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \leqq \text{x } 3\times 10^{-4}\,\sqrt{p}\; R_0^{3/2}/a^2\,, \\
E(k)/k \leqq \text{x } 10^{-2}\, B_{r3}\, (\sin i_S/I_{2Lm})\, (\simeq 10^{+2}) \\
\qquad \leqq \text{x } 0{,}9\times 10^{-3}\, (a/R_0)^{7/2}\,, \\
E(\dot\psi)/\dot\psi \leqq \text{x } 10^{-2}\, B_{r3} \sin i_S/I_{2pn} \leqq \text{x } 3{,}4\times 10^{-6}\,, \\
s/m \leqq \text{x } 1{,}2\times 10^{-6}\,, \\
E(\dot i)_0 \leqq \text{x } 10^{-2}\, B_{r3} \sin i_S \leqq \text{x } 0{,}36\times 10^{-9}\ \text{rd/an}\,.
\end{cases}
$$

Ces conditions sont beaucoup moins restrictives que les précédentes (1-109), (1-111) et ceci parce que l'aplatissement de l'astre central ne produit aucune

variation séculaire de l'inclinaison. En effet, les quantités J_z et K_z qui apparaissent aux dénominateurs dans (1-109) et (1-111) proviennent des effets de l'aplatissement terrestre (1-26) et sont de l'ordre de 60 rd/an. Ces quantités n'apparaissent plus dans (1-113). B_t y figure. Il provient des effets des champs lunaire et solaire (1-43) mais ne dépasse pas 10^{-3} rd/an.

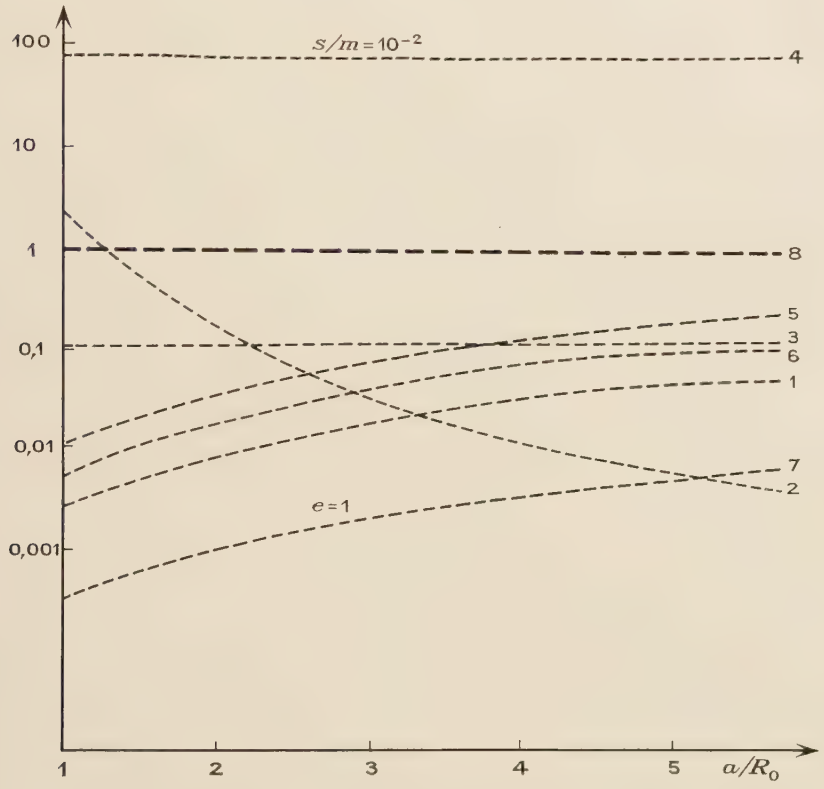


FIG. 13. — Variations cumulatives de l'inclinaison ($i = 90° \pm 3'$). Imprécision des prévisions théoriques $E(i)_t$ due à l'erreur probable sur la valeur des paramètres de perturbation μ_L/a_L^3 (courbe 1), k_{Love} (courbe 2), $\dot{\psi}_{précession}$ (courbe 3), des effets de chocs (courbe 4), des éléments orbitaux i (courbe 5), Ω (courbe 6) et e (courbe 7) ; effet relativiste du champ solaire [choisi comme unité] (courbe 8) ; en abscisse, demi-grand axe de l'orbite en rayons terrestres.

Discussion. — Pour évaluer les possibilités d'observer cet effet, nous avons tracé (fig. 13) des courbes de l'erreur probable dans la prévision des effets classiques en fonction du demi-grand axe de l'orbite. Ces erreurs s'obtiennent en calculant 10^{-2} x à l'aide des conditions (1-113) [sauf la dernière]. Nous utilisons les mêmes marges d'erreur que précédemment (§ IV.1).

Nous pouvons constater que la situation est ici beaucoup plus favorable à l'observation d'un éventuel mouvement relativiste de précession dû au champ solaire :

a) l'erreur la plus grande provient des effets de chocs et est proportionnelle à s/m. L'évaluation de cette erreur est difficile. Il est cependant peu probable que sa valeur soit sensiblement plus faible que celle que nous avons adoptée. De plus, s/m peut difficilement être inférieur à 10^{-2}. En effet, $m = 9\,\pi/16\ (m/s)^3\ \rho^{-2}$, où ρ est la densité moyenne et pour $m/s = 10^3$ et $\rho = 5$, on a $m = 0{,}8\times10^5$ kg.

Ainsi, pour pouvoir observer les effets relativistes avec une précision significative, il faut utiliser un dispositif qui permette d'éliminer ces effets de chocs (satellite double) ou d'en tenir compte (appareils de mesure). Dans ce dernier cas cependant, il est nécessaire d'évaluer les effets du champ électromagnétique sur les courants à l'intérieur du satellite.

b) Les autres erreurs sont généralement inférieures à l'effet relativiste.

Ainsi, compte tenu de ces seules erreurs, une mesure de l'effet relativiste sur l'inclinaison avec une incertitude de 10 % serait alors possible pour des valeurs du demi-grand axe comprises entre 2,3 et 3,6 R_0.

c) La dernière condition de (1-113) porte sur la précision des observations. Elle est ici plus restrictive que les précédentes. L'effet relativiste cumulé sur une période de 10 ans est de $0{,}36\times10^{-6}$ rd, soit 0,076″, quantité 1,3 fois inférieure à la marge d'erreur des mesures de l'inclinaison.

5. **Conclusion.** — Dans la première partie de ce travail, nous avons étudié les possibilités de mettre en évidence les effets relativistes dans le mouvement orbital d'un satellite terrestre.

Après un rappel de la théorie des perturbations, nous avons évalué les perturbations séculaires ou cumulatives de l'orbite elliptique. Ces résultats nous ont permis d'expliciter les conditions d'observation des mouvements relativistes du périgée, du nœud et de l'inclinaison.

L'examen des conditions d'observation a montré que les mouvements relativistes de l'inclinaison peuvent plus facilement être observés à cause de l'absence de perturbations classiques de cet élément dues à l'aplatissement terrestre. Ce dernier effet relativiste est cependant à la limite de la précision actuelle des mesures expérimentales.

6. **Note I. Satellites de Jupiter.** — Nous examinerons ici brièvement les possibilités d'observer des effets relativistes dans le mouvement des satellites de Jupiter.

Les perturbations classiques des orbites dues à l'aplatissement de Jupiter (environ 1/15) sont très importantes. Si l'on se rapporte aux données de Kuiper ([40] p. 72), le coefficient $J_{2,0}$ correspondant à l'aplatissement de cette planète a la valeur $J_{2,0}/R_J^2 = (1{,}471 \pm 0{,}014)\ 10^{-2}$.

Ainsi, dans le mouvement du périjove, le rapport de l'effet classique d'aplatissement (1-26) au mouvement relativiste le plus important (1-90) est

$$\dot{\omega}_z/\dot{\omega}_{r1} = \tfrac{1}{2}\,(J_{2,0}/R_J^2)\,(R_J\,c^2/\mu_J)\,R_J/p = 3{,}7\times10^5\ R_J/p$$

et le rapport de l'erreur probable dans les prévisions de l'effet classique au même effet relativiste est, d'après (1-109),

$$E(\dot{\omega}_z)/\dot{\omega}_{r1} = \left[E(J_{2,0})/R_J^2\right] R_J^2\ c^2/\mu_J\ p \simeq 7\times10^3\ R_J/a\,.$$

Les valeurs de a/R_J varient dans le cas présent de 2,53 pour le cinquième à

environ 300 pour les huitième et neuvième satellites. Le rapport précédent est égal ou supérieur à 23 et empêche toute vérification actuelle.

Nous avons considéré les seules erreurs sur $J_{2,0}$. En fait, pour la plupart des satellites de Jupiter, les éléments moyens sont mal connus et aucune des conditions (1-109) ne peut être satisfaite.

Les conditions (1-110) et (1-111) sont plus sévères que les conditions (1-109), de sorte qu'il est également impossible de mettre actuellement en évidence des mouvements relativistes dus à la rotation de Jupiter.

7. **Note II. Lune.** — L'étude du mouvement de la Lune comporte la résolution du problème des trois corps. Les résultats que nous avons obtenus ici (problème des deux corps) ne sont plus valables dans ce cas. Nous remarquerons simplement ici les incidences de la relativité générale sur le mouvement de la Lune.

Le mouvement relativiste principal du périgée de l'orbite lunaire (De Sitter [12 à 14]) est de l'ordre de 0,06″/siècle. Les mouvements du périgée et du nœud dus à la rotation de la Terre sont environ 200 fois plus faibles. Ces effets sont bien inférieurs au mouvement relativiste du nœud dû au champ solaire égal à 1,9″/siècle. La précision des observations est cependant encore insuffisante ($\simeq$ 3″/siècle) pour que l'existence de ce dernier effet puisse être établie.

DEUXIÈME PARTIE

EFFETS GYROSCOPIQUES

L. I. Schiff [53] a suggéré l'emploi de satellites artificiels terrestres pour mettre en évidence le mouvement relativiste de précession de l'axe de rotation d'un gyroscope se déplaçant dans un champ gravitationnel.

Dans un premier type d'expériences, le satellite lui-même constitue un gyroscope non protégé. Nous ne considérons pas ce type d'expériences car la mesure précise de l'orientation d'un tel gyroscope est difficile. De plus, des perturbations diverses sont très importantes et très difficiles à évaluer avec précision.

Dans le second type d'expériences, le gyroscope est à l'intérieur d'un satellite-laboratoire qui lui sert d'écran. Les mesures peuvent y être effectuées directement. Nous étudierons d'abord, de façon approchée, les mouvements classiques et relativistes de l'axe de rotation d'un tel gyroscope pour discuter ensuite les possibilités d'observation de l'effet relativiste dans cette expérience.

V. Mouvement approché d'un gyroscope

Nous nous limiterons ici aux seuls effets gravitationnels classiques et relativistes. Nous négligerons l'influence de moments électromagnétiques et mécaniques. Ces derniers sont en partie dus au fait que la trajectoire libre du gyroscope protégé ne coïncide pas avec celle du satellite en chute libre. Comme nous l'avons vu dans la première partie, la rotation du gyroscope perturbe sa trajectoire libre [relation (1-106)]. La force correspondant à cet effet (10^{-15} CGS) est beaucoup

plus faible que la force due aux effets de chocs (§ IV.1). Cette dernière est d'ailleurs également très faible (10^{-7} CGS).

Les mouvements gravitationnels de l'axe de rotation d'un gyroscope dépendent de la trajectoire du satellite qui le contient. Cette trajectoire, nous l'avons vu, subit de multiples perturbations. Nous retiendrons les plus importantes, celles dues à l'aplatissement terrestre (1-26). Ainsi, la trajectoire est une ellipse dont l'un des foyers est au centre de la Terre et dont le périgée et le nœud varient de façon séculaire.

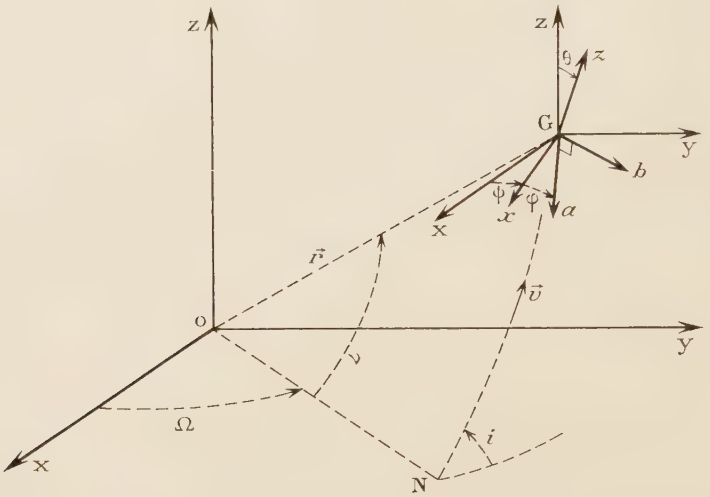


Fig. 14. — oxyz et Gxyz, systèmes d'axes dont l'origine est liée au centre de la Terre et au centre du gyroscope et dont l'orientation est fixe par rapport aux étoiles ; G*abz*, système d'axes lié au gyroscope ; G*x*, intersection des plans Gxy et G*ab*.

Nous admettrons que le gyroscope est solide, homogène et à symétrie de révolution. Nous admettrons encore que les mouvements de l'axe de rotation sont faibles pour les évaluer de façon approchée. Ces mouvements seront rapportés au système Gxyz ainsi défini (fig. 14) : G est lié au centre de gravité du gyroscope, Gz est parallèle à l'axe de rotation terrestre d'une certaine époque, Gx est parallèle à l'intersection des plans de l'équateur et de l'écliptique pour la même époque, Gy est tel que Gxyz est droit. L'orientation de ce système est fixe par rapport aux étoiles.

Examinons en premier lieu les effets gravitationnels classiques.

1. **Mouvement classique.** — En plus du système Gxyz précédemment défini, nous utiliserons encore le système G*abz* lié au gyroscope et le système G*xyz*.

Gz est l'axe de symétrie de révolution du gyroscope. Le moment d'inertie par rapport à cette direction est C, G*a* est lié au gyroscope et perpendiculaire à Gz, G*abz* est droit.

G*x* est l'intersection du plan Gxy et du plan équatorial du gyroscope G*ab*, G*y* est tel que G*xyz* est droit.

A est le moment d'inertie du gyroscope par rapport à une droite contenue dans le plan Gab. $\vec{\omega}$ est la vitesse de révolution du gyroscope par rapport aux étoiles.

La position du gyroscope peut être définie par les trois angles $\psi = \widehat{xGx}$, $\theta = \widehat{zGz}$, $\varphi = \widehat{xGa}$ et les équations du mouvement autour du centre de gravité sont

$$\dot{\vec{S}} = \vec{M} \,, \tag{2-1}$$

où $\dot{\vec{S}}$ est la dérivée par rapport au temps du moment angulaire du gyroscope et $\vec{M}$ la somme des moments qui s'exercent sur le gyroscope. Nous examinerons d'abord les caractéristiques du mouvement eulerien ($\vec{M} = 0$).

1. Mouvement eulerien. — Le moment angulaire du gyroscope peut s'écrire en fonction des composantes de la rotation instantanée dans le système lié au gyroscope $Gabz$

$$\vec{S} = A\,(\omega_a^2\,\vec{a} + \omega_b^2\,\vec{b}) + C\,\omega_z^2\,\vec{z} \,, \tag{2-2}$$

où les indices a, b, ... indiquent qu'il s'agit des composantes selon les axes Ga, Gb, ... Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... sont unitaires et dirigés selon les axes Ga, Gb, ...

La dérivée de $\vec{S}$ est nulle si le mouvement est libre. Compte tenu de la rotation des axes $Gabz$, ceci s'écrit

$$\begin{aligned} &\dot{S}_a = A\,\dot{\omega}_a + (C - A)\,\omega_b\,\omega_z = 0 \,, \\ &\dot{S}_b = A\,\dot{\omega}_b - (C - A)\,\omega_a\,\omega_z = 0 \,, \qquad \dot{S}_z = C\,\dot{\omega}_z = 0 \,. \end{aligned} \tag{2-3}$$

Ce système admet la solution :

$$\omega_a = N\,\omega_z \cos(\omega_1\,t + \alpha) \,, \quad \omega_b = N\,\omega_z \sin(\omega_1\,t + \alpha) \,, \quad \omega_z = \text{Cte} \,, \tag{2-4}$$

où $\omega_1 = (C - A)\,\omega_z/A$. N et α sont des constantes d'intégration.

Le mouvement eulerien satisfait encore la condition $\vec{\omega}.\vec{S} \wedge \vec{Gz} = 0$. Ainsi ces trois vecteurs sont toujours dans un même plan.

Dans son étude du mouvement libre de l'axe de rotation terrestre, Poinsot [52] a utilisé la représentation suivante (fig. 15).

a) $\vec{S}$ est fixe par rapport aux étoiles.

b) $\vec{\omega}$ décrit un cône de demi-ouverture δ. Ce cône est également fixe. Son axe se confond avec la direction de $\vec{S}$. C'est le cône herpolode. La vitesse de rotation de $\vec{\omega}$ autour de $\vec{S}$ est $|\vec{\omega}|$.

c) $\vec{Gz}$, axe de symétrie du gyroscope, se confond avec l'axe d'un second cône, le cône polhode de demi-ouverture γ. La ligne de contact des deux cônes coïncide avec la direction de $\vec{\omega}$. Le cône polhode roule sur le premier et, dans ce mouvement, entraîne l'axe de symétrie $\vec{Gz}$ dans un mouvement de rotation autour de $\vec{S}$ de vitesse aussi égale à $|\vec{\omega}|$.

Les angles ν et δ dépendent de γ. S'ils sont petits, on a (Woolard [66]) $\nu = \gamma\,A/C$ et $\delta = \left[A\,(C - A)/C^2\right]\gamma$.

Discussion. — Nous admettrons qu'initialement l'axe instantané de rotation est très proche de l'axe de symétrie $\vec{Gz}$ ($\gamma \to 0$). Avec cette condition, les cônes sont de faible ouverture ($\nu \simeq \delta \simeq \gamma \to 0$). Les mouvements des axes de symétrie

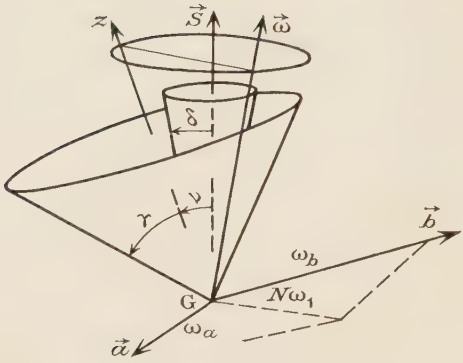


Fig. 15.

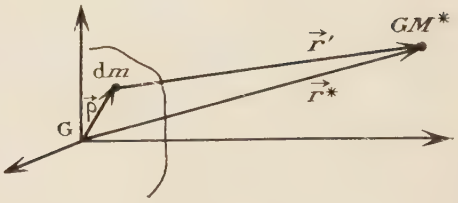


Fig. 16.

et de rotation sont périodiques, de très courte période $2\pi/|\vec{\omega}|$ et de faible amplitude. Il n'y a pas d'effets séculaires.

Examinons maintenant les caractéristiques du mouvement forcé.

2. Mouvement forcé. — Etant donné la symétrie de révolution du gyroscope, il est plus simple de définir le moment angulaire en fonction de ses composantes dans le système G*xyz* dont les mouvements sont très faibles. Les composantes de la rotation $\vec{\Omega}$ de ce système ont les valeurs

$$\text{(2-5)} \qquad \Omega_x = -\dot{\theta}\,, \qquad \Omega_y = -\sin\theta\,\dot{\psi}\,, \qquad \Omega_z = \cos\theta\,\dot{\psi}\,.$$

Les premiers membres des équations (2-1) sont alors

$$\text{(2-6)} \qquad \begin{aligned} \dot{S}_x &= A\,\dot{\omega}_x + (C - A)\,\Omega_y\,\Omega_z + C\,\dot{\varphi}\,\Omega_y\,, \\ \dot{S}_y &= A\,\dot{\omega}_y + (A - C)\,\Omega_x\,\Omega_z + C\,\dot{\varphi}\,\Omega_x\,, \quad \dot{S}_z = C\,\dot{\omega}_z\,. \end{aligned}$$

Leur expression en fonction de φ, ψ et θ permet de calculer les variations de ces quantités et le mouvement de l'axe de symétrie $\vec{Gz}$. Pour une évaluation approchée des variations, on peut y négliger les termes en $\dot{\psi}\,\dot{\theta}$, $\dot{\psi}\,\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}\,\dot{\theta}$ beaucoup plus faibles que $\dot{\varphi}\,\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}\,\dot{\psi}$. Il reste

$$\text{(2-7)} \qquad \dot{S}_x = -C\,\dot{\varphi}\,\dot{\psi}\sin\theta\,, \quad \dot{S}_y = C\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\,, \quad \dot{S}_z = C\,\ddot{\varphi}\,.$$

Avec l'hypothèse $\gamma \to 0$ (§ V.1.*1*), ces premiers membres représentent (Woolard) les mouvements de l'axe de rotation qui nous intéressent plus particulièrement.

A) Evaluation des seconds membres. — Le moment dû au champ gravitationnel d'un troisième corps (Terre, Soleil, Lune) s'obtient par intégration de l'élément (fig. 16)

$$\text{(2-8)} \qquad \overrightarrow{dM} = \vec{\rho} \wedge \overrightarrow{dF}\,, \qquad \overrightarrow{dF} = (\mu^*\,dm/r'^3)\,\vec{r'}\ ;$$

$\mu^* = G\,M^*$ est la masse du troisième corps sphérique et homogène en première approximation.

Cet élément peut se développer en fonction du paramètre $|\vec{\rho}|/|\vec{r^*}|$. L'intégration du terme d'ordre 0 donne 0, car l'origine du système d'axes est au centre de gravité du gyroscope. Dans les mêmes conditions, le moment du premier ordre possède les composantes

$$(2\text{-}9) \qquad M_x = 3\,\mu^*\,\beta^*\,\gamma^*\,(C-A)/r^{*3},$$
$$M_y = -3\,\mu^*\,\alpha^*\,\gamma^*\,(C-A)/r^{*3}\,, \quad M_z = 0\,,$$

où α^*, β^* et γ^* sont les cosinus directeurs du troisième corps dans le système $Gxyz$ et $\vec{r^*}$ son rayon vecteur.

Les équations du mouvement de l'axe de rotation (2-1) s'écrivent maintenant :

$$(2\text{-}10) \qquad \dot{\psi} = -D\sin^{-1}\theta\,\beta^*\,\gamma^*\,, \quad \dot{\theta} = -D\,\alpha^*\,\gamma^*\,, \quad \dot{\varphi} = \text{Cte}\,,$$

avec $D = 3\,(\mu^*/r^{*3})\,(C-A)/C\,\dot{\varphi}$.

Pour un satellite terrestre, les valeurs de μ^*/a^{*3} relatives aux champs terrestre, lunaire et solaire sont respectivement de l'ordre de $1{,}54\times10^{-6}$, $0{,}9\times10^{-13}$ et $0{,}4\times10^{-13}$ rd/s. Nous pouvons négliger les effets lunaire et solaire.

B) Solution. — Les seconds membres de (2-10) sont des fonctions des éléments orbitaux de la Terre (corps perturbateur) dans le système de référence Gxyz. Ces éléments sont les mêmes que ceux de l'orbite du satellite dans un système oxyz lié au centre de la Terre. Seuls ν et ν^* diffèrent : $\nu = \nu^* + 180^\circ$. α^*, β^* et γ^*, calculés au moyen de rotations d'Euler successives, ont les valeurs suivantes :

$$(2\text{-}11) \quad \begin{cases} \alpha^* = & \cos\beta\cos\nu + \sin\beta\cos i\sin\nu\,, \\ \beta^* = & \sin\theta\sin i\sin\nu + \cos\theta\,(\sin\beta\cos\nu - \cos\beta\cos i\sin\nu)\,, \\ \gamma^* = & -\cos\theta\sin i\sin\nu + \sin\theta\,(\sin\beta\cos\nu - \cos\beta\cos i\sin\nu)\,, \end{cases}$$

avec $\beta = \Omega - \psi$.

a) *Précession.* — Le développement des seconds membres de (2-10) en fonction des éléments orbitaux du satellite fait apparaître les quantités

$$(a/r)^3\,, \quad (a/r)^3\begin{pmatrix}\sin 2f\\ \cos 2f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin 2\omega\\ \cos 2\omega\end{pmatrix}, \quad (a/r)^3\begin{pmatrix}\sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix}.$$

Nous avons vu dans la première partie que l'aplatissement terrestre entraîne une variation séculaire des éléments Ω et ω [relation (1-26)]. Ainsi, dans le cas présent, les variations séculaires classiques (indice c) proviennent des seuls termes en $(a/r)^3$, quantité de valeur moyenne égale à $(1-e^2)^{-3/2}$. Ce sont les suivantes :

$$(2\text{-}12) \qquad \dot{\theta}_c = 0\,, \quad \dot{\psi}_c = -D_c\cos^2 i\cos\theta\,(R_0/\sqrt{a\,p})^3\,,$$

où $D_c = (3/2)\,n_0^2\,(C-A)/C\,\dot{\varphi} = 0{,}20\,(C-A)/C\,\dot{\varphi}$ rd/j [$\dot{\varphi}$ est en rd/s]. A cet effet séculaire, s'ajoutent des variations périodiques.

b) *Nutations.* — Si le développement des seconds membres de (2-10) est limité aux termes du premier ordre par rapport à l'excentricité de l'orbite, les variations de longue période se réduisent à deux mouvements de nutation proportionnels à $(C-A)/C\,\dot{\varphi}$. L'intégration donne, en effet,

$$(2\text{-}13) \qquad \theta_{c1} = N_1\cos\theta\cos\beta\,, \quad \psi_{c1} = N_1\cos 2\theta\sin^{-1}\theta\sin\beta\,,$$
$$\theta_{c2} = N_2\sin\theta\cos 2\beta\,, \quad \psi_{c2} = N_2\cos\theta\sin 2\beta\,.$$

Pour calculer leur amplitude, nous avons utilisé la relation (1-26) donnant la variation de Ω due à l'aplatissement terrestre ($\dot{\beta} \simeq \dot{\Omega}$). Il vient

$$(2\text{-}14) \qquad N_1 = -4\,N\sin i\,, \quad N_2 = N\sin i\,\mathrm{tg}\,i\,,$$

avec $N = \left[(C-A)/C\,\dot{\varphi}\right](n_0\,R_0^2/4\,J_{2,0})\,\sqrt{a/R_0} = 0{,}29\left[(C-A)/C\,\dot{\varphi}\right]\sqrt{a/R_0}$ rd .

c) *Discussion.* — Nous avons vu que, dans le cas où l'axe instantané de rotation est proche de l'axe de symétrie de révolution, la théorie classique du mouvement d'un gyroscope prévoit des mouvements de précession et de nutation de l'axe de rotation. Ces variations de $\dot{\psi}$ et θ sont $C\,\dot{\varphi}^2/(C - A)$ fois plus faibles que $\dot{\varphi}$. Par conséquent, si cette quantité est grande (de l'ordre de 10^2), les approximations faites dans l'évaluation des premiers termes (2-6) des équations du mouvement sont justifiées.

Nous allons maintenant étudier l'influence des termes additionnels qu'introduit la relativité générale dans les seconds membres des équations du mouvement du moment angulaire.

2. **Mouvement relativiste.** — En relativité générale, le moment angulaire propre est défini par (Papapetrou [49], Corinaldesi & Papapetrou [9])

$$\text{(2-15)} \qquad \mathcal{S}^{\mu\nu} = \int \left[(x^\mu - x_0^\mu)\; T^{\nu 0} - (x^\nu - x_0^\nu)\; T^{\mu 0}\right] \mathrm{d}v \,,$$

où $T^{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie de la particule d'épreuve. Dans le cas présent, ce tenseur est nul sauf à l'intérieur du tube d'univers qui contient le gyroscope. $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ est rapporté au point de coordonnées x_0^μ.

Papapetrou détermine les équations du mouvement de $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ en annulant les intégrales d'espace de la variation de $T^{\mu\nu}$ (méthode de Fock). Il obtient les équations suivantes que nous avons déjà rappelées (1-95) :

$$\text{(2-16)} \qquad u^\lambda \nabla_\lambda \mathcal{S}^{\alpha\beta} - u^\alpha\, u_\rho\, \mathcal{S}^{\rho\beta} - u^\beta\, u_\rho\, \mathcal{S}^{\alpha\rho} = 0 \,,$$

où u^α est le quadrivecteur vitesse du gyroscope.

Les équations (2-16) forment un système de trois équations indépendantes. Pour déterminer les six composantes de $\mathcal{S}^{\mu\nu}$, il est nécessaire d'y ajouter trois conditions. Ces conditions peuvent être :

a) les conditions de Corinaldesi & Papapetrou

$$\text{(2-17a)} \qquad \mathcal{S}^{p0} = 0 \,;$$

b) les conditions de Pirani [51]

$$\text{(2-17b)} \qquad u_\rho\, \mathcal{S}^{\mu\rho} = 0 \,.$$

1. Champ de Schwarzschild. — Schiff [54] a explicité les équations (2-16) dans le cas où la métrique de l'espace-temps est celle de Schwarzschild. Au premier ordre en $\mu/r\,c^2$, les termes d'origine relativiste qui apparaissent au second membre des équations aux variations de $\vec{\mathcal{S}}$ sont :

a) si l'on adopte les conditions $\mathcal{S}^{p0} = 0$,

$$\text{(2-18a)} \qquad \dot{\vec{\mathcal{S}}} = (\mu/c^2\, r^3)\left[2\,\vec{\mathcal{S}}\,(\vec{r}.\vec{v}) + 2\,\vec{v}\,(\vec{r}.\vec{\mathcal{S}}) - \vec{r}\,(\vec{v}.\vec{\mathcal{S}}) - (3\,\vec{r}/r^2)\,(\vec{r}.\vec{v})\,(\vec{r}.\vec{\mathcal{S}})\right] ;$$

b) si l'on adopte les conditions $u_\rho\, \mathcal{S}^{\mu\rho} = 0$,

$$\text{(2-18b)} \qquad \dot{\vec{\mathcal{S}}} = (3\,\mu/c^2\, r^3)\left[\vec{v}(\vec{r}.\vec{\mathcal{S}}) - (\vec{r}/r^2)\,(\vec{r}.\vec{v})\,(\vec{r}.\vec{\mathcal{S}})\right] + \vec{\mathcal{S}}\,(\vec{v}.\vec{F}) - \vec{F}\,(\vec{v}.\vec{\mathcal{S}}) \,,$$

où $\vec{F}$ est la force non gravitationnelle qui perturbe la trajectoire $u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = 0$. Elle s'applique au centre de masse du gyroscope. Pour un satellite terrestre, nous l'avons vu précédemment (début du chap. V), cette force, de l'ordre de 10^{-7} CGS, est beaucoup plus faible que la quantité $\mu/r^2 \simeq 10^3$ CGS. Nous pouvons ainsi négliger dans (2-18 b) les termes fonctions de $\vec{F}$.

A cause des difficultés d'observation à partir d'un laboratoire terrestre, les mesures doivent être faites par un observateur dans le satellite (ou un système automatique de mesure qui émet les résultats, ce qui revient au même). Pratiquement, il sera simple d'y choisir un système d'axes Gxyz dont l'orientation soit fixe par rapport aux étoiles. Schiff obtient les variations du moment angulaire dans un tel système à partir des relations entre les étalons de mesure de l'espace de Schwarzschild et de l'espace localement euclidien du gyroscope :

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\Omega}_{r1} \wedge \vec{S}\,, \tag{2-19}$$

avec $\vec{\Omega}_{r1} = (3\,\mu/2\,c^2\,r^3)\,(\vec{r} \wedge \vec{v})$. Le résultat est le même que l'on adopte les conditions de Pirani ou de Corinaldesi & Papapetrou. Ces conditions sont en effet identiques dans le système propre du satellite.

2. Rotation du corps central. — Il est encore possible de tenir compte de la rotation d'un corps central en utilisant la solution des équations du champ (1-100), valable dans le cas où le corps central est sphérique et homogène. La précession additionnelle $\vec{\Omega}_{r2}$ du moment angulaire (Schiff [54]) est alors

$$\vec{\Omega}_{r2} = (2\,\mu\,R_0^2/5\,c^2\,r^3)\,[(3\,\vec{r}/r^2)\,(\vec{\omega}_0.\vec{r}) - \vec{\omega}_0]\,. \tag{2-20}$$

Pour un satellite terrestre, le rapport de ces deux mouvements de précession est de l'ordre de

$$|\,\vec{\Omega}_{r2}\,|/|\,\vec{\Omega}_{r1}\,| \simeq (4\,\omega_0/5\,n_0)\,\sqrt{R_0/a} = 5\times10^{-2}\,\sqrt{R_0/a}\,. \tag{2-21}$$

Nous évaluerons de façon plus précise les seuls effets du champ de Schwarzschild.

3. Solution. — Les équations (2-19) s'écrivent encore

$$\dot{\vec{S}} = (3\,\mu/2\,c^2\,r^3)\,[\vec{v}(\vec{r}.\vec{S}) - \vec{r}(\vec{v}.\vec{s})]\,. \tag{2-22}$$

Dans le système G*xyz* (fig. 14) auquel nous rapportons les variations de $\vec{S}$, les composantes de la rotation du gyroscope sont

$$\omega_x = -\,\dot{\theta}\,, \quad \omega_y = -\sin\theta\,\dot{\psi}\,, \quad \omega_z = \cos\theta\,\dot{\psi} + \dot{\varphi}\,. \tag{2-23}$$

Toujours avec l'hypothèse que les mouvements classiques et relativistes de l'axe de symétrie de révolution sont faibles, nous pouvons écrire, à une excellente approximation ($\vec{z}$ étant le vecteur unitaire selon $\vec{Gz}$),

$$\vec{S} = C\,\dot{\varphi}\,\vec{z}\,. \tag{2-24}$$

Dans le système d'axes S*stw* (fig. 1), les composantes de $\vec{r}$ et de $\vec{v}$ sont $(r, 0, 0)$ et $(v_r, v_t, 0)$. v_r et v_t sont les vitesses radiale et tangentielle du satellite. La matrice des quatre rotations θ, $\Omega - \psi$, i et ν permet de calculer les composantes de $\vec{r}$ et de $\vec{v}$ dans le système G*xyz*. L'introduction de ces quantités de (2-23) et de (2-24) dans (2-22) donne

$$\ddot{\varphi} = 0\,, \quad \dot{\psi} = D(a/r)^3\,(\cos i + \operatorname{cotg}\theta\,\sin i\,\cos\beta)\,, \quad \dot{\theta} = -\,D(a/r)^3\,\sin i\,\sin\beta\,, \tag{2-25}$$

avec $D = 3\,n^2\,\sqrt{\mu\,p}/2\,c^2\,, \qquad \beta = \Omega - \psi\,.$

a) *Précession.* — Négligeons les faibles effets de courte période (une révolution du satellite). L'intégration de (2-25) fait apparaître un mouvement relativiste de précession (effet séculaire) égal à

(2-26a) $$\dot{\psi}_r = D_r \cos i \sqrt{R_0^5/a^2\, p^3}\,, \qquad \dot{\theta}_r = 0\,,$$

avec $D_r = (3\, n_0/2)\ \mu/c^2\, R_0 \simeq 1{,}07\times10^{-7}$ rd/j .

b) *Nutation.* — Au mouvement de précession s'ajoute un mouvement de nutation. Il provient des variations de longue période de β ($\dot{\beta} \simeq \dot{\Omega}$) dues à l'aplatissement terrestre. Ce mouvement est

(2-26b) $$\psi_r = N_r \operatorname{tg} i \operatorname{cotg} \theta\ (p/R_0) \sin \beta\,, \qquad \theta_r = N_r \operatorname{tg} i\ (p/R_0) \cos \beta\,,$$

avec $N_r = (\mu/c^2\, R_0)\ R_0^2/J_{2,0} \simeq 0{,}7\times10^{-6}$ rd .

Ces mouvements relativistes sont très faibles et justifient l'approximation faite dans l'évaluation des premiers membres des équations du mouvement (2-7).

Nous allons maintenant étudier les possibilités d'observer ces effets relativistes.

VI. **Conditions d'une vérification**

Nous allons maintenant expliciter les conditions (1) et (2) relatives à la précision des prévisions théoriques et des mesures expérimentales. Comme dans la première partie, nous nous limiterons aux possibilités d'observation des effets relativistes séculaires car ces effets de précession sont susceptibles d'une mesure expérimentale plus précise.

1. **Condition** (1). — Pour expliciter la condition (1), il faut évaluer l'erreur probable dans les prévisions théoriques de l'effet classique de précession. Cette erreur probable s'obtient par dérivation de (2-12) par rapport aux différentes quantités qui y apparaissent. D'après la condition (1), l'erreur probable $E(c_i)$ sur ces paramètres et éléments doit alors satisfaire les conditions

(2-27)
$$\begin{cases} \text{a)} & E(n)/n \leqq 2\ G\,, \\ \text{b)} & E(e) \leqq G\ (1 - e^2)/3\ e\,, \\ \text{c)} & E(i) \leqq G \operatorname{cotg}\ (i/2)\,, \\ \text{d)} & E\big[(C - A)/C\big]/\big[(C - A)/C\big] \leqq G\,, \\ \text{e)} & E(\dot{\varphi})/\dot{\varphi} \leqq G\,, \\ \text{f)} & E(\theta) \leqq G \operatorname{tg} \theta\,, \end{cases}$$

avec
$$G = \mathrm{x}\ 10^{-2}\ (n_0\, R_0^2/c^2)\ \big[\dot{\varphi}\, C/(C - A)\big] \sec i \sec \theta \sqrt{p/R_0}$$
$$= \mathrm{x}\ 5{,}5\times10^{-9}\ \big[\dot{\varphi}\, C/(C - A)\big] \sec i \sec \theta \sqrt{p/R_0}\ ;$$

$\dot{\varphi}$ est la vitesse de révolution du gyroscope selon Gz exprimée en radians par seconde et x est l'imprécision de la vérification (exprimée en pour cent).

Discussion. — Notons d'abord que les conditions précédentes (2-27) excluent le choix d'une orientation parallèle des axes de rotation du gyroscope et de la Terre. Ceci découle du fait que pour $\theta = 0$, la valeur de ψ n'est pas définie.

La précision possible dans les mesures du moyen mouvement n ($\simeq 10^{-7}$), de l'excentricité et de l'inclinaison ($\simeq 10^{-5}$) permet de satisfaire les conditions (2-27abc). Par exemple, une vérification à 1 % près serait possible pour une valeur de $\dot{\varphi}\, C/(C - A)$ égale ou supérieure à 2 000 rd/s, soit $(C - A)/C \simeq 0{,}1$ et $\dot{\varphi} \simeq 200$ rd/s.

S'il est possible d'atteindre le centième de seconde d'arc dans les mesures de l'orientation θ, ψ du gyroscope, (2-27) est satisfaite avec la même valeur de $\dot{\varphi}\, C/(C - A) \simeq 2\,000$ pour $x = 0{,}1$.

Les mesures de $\dot{\varphi}$ peuvent être très précises. Si on utilise un stroboscope relié à une horloge de haute précision (quartz), il est possible de limiter l'erreur à environ $E(\dot{\varphi})/\dot{\varphi} \simeq 10^{-7}$. La condition (2-27e) est alors facilement satisfaite.

L'évaluation précise des moments d'inertie peut être difficile. Cependant, même si l'erreur relative ne peut être inférieure à 10^{-4}, il est encore possible de satisfaire (2-27d) pour $x = 1$ si $\dot{\varphi}\, C/(C - A) \simeq 2 \times 10^4$ soit, par exemple, $\dot{\varphi} \simeq 500$ rd/s et $(C - A)/C \simeq 2{,}5 \times 10^{-2}$ (gyroscope d'aplatissement faible ou quasi sphérique).

L'examen des conditions (1) montre donc qu'il est relativement facile de prévoir avec suffisamment de précision la valeur du mouvement gravitationnel classique de précession superposé à l'effet relativiste. Nous allons maintenant examiner la condition (2).

2. **Condition** (2). — La condition (2) concerne la précision des mesures expérimentales du mouvement de précession. Si l'erreur probable dans ces mesures est $E(\dot{\psi})_0$, on doit avoir, d'après (2-25),

$$(2\text{-}28) \qquad E(\dot{\psi})_0 \leqq x\, 10^{-2}\, \dot{\psi}_r \leqq x\, 2{,}1 \times 10^{-4} \cos i \sqrt{R_0^5/p^2\, a^3}\ (''/\text{j})\ .$$

Cette condition implique une durée de l'expérience suffisante pour déceler l'effet cumulé. Si, comme précédemment, nous adoptons la précision d'un centième de seconde d'arc dans les mesures de l'orientation de l'axe de rotation, nous constatons qu'une vérification éventuelle ($x = 10$) nécessiterait une période d'observation de l'ordre de 10 j [alors qu'il faudrait 200 j pour l'effet de Lense & Thirring (2-20)].

3. **Conclusion.** — Dans cette seconde partie, nous avons examiné les conditions d'observation des mouvements relativistes de précession d'un gyroscope dans un satellite en chute libre dans le champ gravitationnel terrestre.

Nous avons tenu compte des seuls effets gravitationnels classiques et relativistes pour expliciter les conditions d'une vérification éventuelle. L'examen de ces conditions montre que le calcul des effets gravitationnels classiques peut être suffisamment précis pour que l'on puisse mettre en évidence au moyen d'un gyroscope des effets relativistes (effets dus au champ de Schwarzschild et à la rotation de la Terre sur elle-même) avec une incertitude de 10 %. La valeur très faible de l'effet nécessite une période d'observation de l'ordre de 10 j pour le premier et de 200 j pour le second si la précision des mesures atteint le centième de seconde d'arc.

4. **Note. Mouvement de l'axe de rotation terrestre.** — La Terre en rotation sur elle-même, en chute libre dans les champs gravitationnels solaire et lunaire peut être assimilée à un gyroscope.

Rapporté à un axe normal au plan de l'écliptique, le mouvement de précession de l'axe de rotation terrestre est de $5\,025{,}4 \pm 0{,}2''$/siècle. L'effet relativiste, de $1{,}9''$/siècle, est bien supérieur à la précision de ces observations.

Toutefois, il est impossible de tenir compte avec une précision suffisante des effets classiques qui sont, dans le cas présent, très complexes. Si les effets dus à l'élasticité de la croûte terrestre sont négligeables, la présence d'un noyau liquide au centre de la Terre limite la précision du calcul de $(C - A)/C$. Selon le modèle de noyau choisi, cette quantité, déduite de la nutation de Bradley, peut varier de plus de 0,5 %. A cette imprécision correspond une erreur probable des prévisions de la précession classique principale de l'ordre de 25″/siècle, quantité bien supérieure à l'effet relativiste qui ne peut ainsi être mis en évidence de façon significative.

TROISIÈME PARTIE

DÉCALAGE DE FRÉQUENCES

Plusieurs auteurs et en particulier Signer [57] ont suggéré l'emploi de satellites artificiels terrestres pour mettre en évidence des effets de décalage cinématique que prévoit la relativité générale. Nous examinerons maintenant les possibilités d'observation de ces effets.

Nous établirons d'abord des expressions du décalage dans un champ de gravitation. Nous tiendrons compte, de façon approchée, des erreurs qu'introduisent l'instabilité des sources expérimentales et l'impossibilité de synchroniser parfaitement deux de ces sources à un instant donné. Nous expliciterons ensuite ces expressions pour trois types d'expériences réalisables à l'aide de satellites. Nous discuterons enfin les conditions d'observation des effets relativistes.

VII. **Décalage de fréquences en relativité générale**

Nous utiliserons ici les définitions suivantes, déjà introduites par M.-A. Tonnelat [62]. Nous supposons d'abord que les horloges atomiques mesurent le temps propre $d\tau$ défini par $d\tau = ds/c$.

(3-1)
$$\begin{aligned} d\tau_{SS} &= \text{intervalle de temps propre écoulé pour l'horloge-source,} \\ d\tau_{OO} &= \text{intervalle de temps propre écoulé pour l'horloge-observateur.} \end{aligned}$$

Soit

(3-2)
$$\begin{cases} dN_{SS} = \text{nombre de battements émis par la source S et reçus par un observateur en S,} \\ dN_{OO} = \text{nombre de battements émis par l'horloge liée à l'observateur et reçus par cet observateur,} \\ dN_{SO} = \text{nombre de battements émis par la source S et reçus par l'observateur en O.} \end{cases}$$

Nous pouvons encore définir

(3-3)
$$\begin{cases} \nu_{SS} = dN_{SS}/d\tau_{SS} = \text{fréquence propre de la source S,} \\ \nu_{OO} = dN_{OO}/d\tau_{OO} = \text{fréquence propre de la source O,} \\ \nu_{SO} = dN_{SO}/d\tau_{OO} = \text{fréquence relative de la source S pour l'observateur O,} \\ d\tau_{SO} = dN_{SO}/\nu_{OO} = \text{temps propre écoulé en S tel que le mesure l'observateur en O.} \end{cases}$$

Si nous adoptons un principe de conservation du nombre de battements émis

et reçus au cours de l'intervalle de temps couvrant l'émission et la réception (fig. 17b), nous pouvons écrire

$$\int_{t_2}^{t_4} dN_{so} - \int_{t_1}^{t_3} dN_{ss} = 0 , \tag{3-4}$$

où t_1 et t_3 (t_2 et t_4) marquent le début et la fin de l'émission (réception).

Stabilité des sources et fréquence propre. — Dans la discussion des décalages, on admet généralement que les horloges source et observateur ont même fréquence propre $\nu_{ss} = \nu_{oo}$ (transportées en un même point, elles sont synchrones). Nous abandonnerons ici cette hypothèse qui ne peut être satisfaite expérimentalement.

Nous admettrons plutôt que deux horloges i, j du même type k :

a) sont dotées d'un réglage de la fréquence et peuvent, lorsqu'elles sont transportées en un même point, être synchronisées avec une précision telle que l'on ait, au moment τ_{iiR} du réglage,

$$(\nu_{ii}/\nu_{jj})_{\tau_{iiR}} = 1 \pm [E(\nu)/\nu] ; \tag{3-5}$$

b) sont affectées d'un coefficient de stabilité défini par

$$(\nu_{ii})_{\tau_{ii}} = (\nu_{ii})_{\tau_{ii0}} [1 \pm \alpha_{k(\tau_{ii}-\tau_{ii0})}] \tag{3-6}$$

où τ_{ii0} est un instant initial quelconque.

La stabilité des horloges peut être évaluée expérimentalement par comparaison de la marche de deux horloges i, j de même type. En négligeant les termes en α_k^2, on a

$$(\nu_{ii}/\nu_{jj})_{\tau_{ii}} = (\nu_{ii}/\nu_{jj})_{\tau_{ii0}} (1 \pm 2\,\alpha_{k(\tau_{ii}-\tau_{ii0})}) . \tag{3-7}$$

Nous pouvons maintenant écrire la relation entre la fréquence propre des horloges source et observateur. Nous admettons qu'à un instant τ_{ooR}, les horloges sont au même point et synchronisées (3-5). A un instant ultérieur, le rapport de leur fréquence propre est

$$\nu_{oo} = \nu_{ss} \{ 1 \pm [E(\nu)/\nu] + \alpha_{s(\tau_{ss}-\tau_{ssR})} + \alpha_{o(\tau_{oo}-\tau_{ooR})} \} . \tag{3-8}$$

Si les vitesses des horloges sont très inférieures à c, on a

$$\nu_{oo} = \nu_{ss} [1 \pm E(\nu_{ss}/\nu_{oo})] , \tag{3-9}$$

avec $$E(\nu_{ss}/\nu_{oo}) = [E(\nu)/\nu] + (\alpha_s + \alpha_o)_{(\tau_{oo}-\tau_{ooR})} .$$

Nous admettrons maintenant que ν_{ss} est constant. Ses variations éventuelles sont donc interprétées comme des changements d'unité de temps propre [3].

a) *Décalage cumulatif.* — Divisons par ν_{ss} la condition (3-4). En vertu de (3-9), cette condition peut s'écrire

$$\int_{t_1}^{t_3} d\tau_{ss} = \int_{t_2}^{t_4} d\tau_{so} [1 \pm E(\nu_{ss}/\nu_{oo})] . \tag{3-10}$$

Négligeons le terme d'erreur fonction du décalage $d\tau_{so} - d\tau_{oo}$. Soustrayant aux deux membres de (3-10) $D\tau_{oo} = \int_{t_2}^{t_4} d\tau_{oo}$, le décalage cumulatif vaut

$$D\tau_{so} - D\tau_{oo} = \int_{t_1}^{t_3} d\tau_{ss} - \int_{t_2}^{t_4} d\tau_{oo} [1 \pm E(\nu_{ss}/\nu_{oo})] . \tag{3-11}$$

[3] Dans les cas où l'on compare directement les raies spectrales de deux atomes, on adopte $\alpha = 0$. On réalise aussi $E(\nu)/\nu = 0$ en choisissant les raies spectrales correspondantes.

Ce décalage indique la différence des temps propres (source et observateur) écoulés, mesurée par l'observateur. C'est la forme intégrale du décalage de fréquences.

b) *Décalage instantané.* — La valeur du décalage instantané se déduit encore de la condition (3-4) et des définitions (3-3). On a, en effet,

$$(3\text{-}12) \qquad (\nu_{so} - \nu_{ss})/\nu_{ss} = (d\tau_{ss}/d\tau_{oo}) - 1$$

que l'on écrira sous la forme

$$(3\text{-}13) \qquad (\nu_{so} - \nu_{ss})/\nu_{ss} = (dt_s/dt_s)\,(dt_o/d\tau_{oo})\,(dt_s/dt_o) - 1\,,$$

où dt_s et dt_o sont les durées d'émission et de réception en temps coordonné.

Le décalage effectivement mesuré est fonction de la quantité précédente. Il a la valeur

$$(3\text{-}14) \qquad (\nu_{so} - \nu_{oo})/\nu_{oo} = \left[(\nu_{so} - \nu_{ss})/\nu_{ss}\right](\nu_{ss}/\nu_{oo}) + (\nu_{ss} - \nu_{oo})/\nu_{oo}$$

et, en négligeant le terme d'erreur fonction du décalage,

$$(3\text{-}15) \qquad (\nu_{so} - \nu_{oo})/\nu_{oo} = \left[(\nu_{so} - \nu_{ss})/\nu_{ss}\right] \pm E(\nu_{ss}/\nu_{oo})\,.$$

Nous allons maintenant expliciter les valeurs du décalage cumulatif ou instantané pour diverses expériences où l'horloge-source est dans un satellite terrestre.

VIII. Types d'expériences

Nous envisagerons trois types d'expériences. Dans chacune, l'horloge de l'observateur est fixe sur la Terre, l'horloge-source est dans un satellite terrestre.

Dans un système lié au centre de la Terre et à orientation fixe par rapport aux étoiles.

1. Les horloges coïncident au début et à la fin de l'expérience (type a). On y mesure un décalage cumulé. De t_1 à t_1, le satellite est mis en orbite, de t_r à t_4 il est récupéré. Nous admettons qu'entre temps $t_1 - t_r$, son mouvement est képlérien (fig. 17a).

2. Les horloges ne coïncident ni au début ni à la fin de l'expérience (type b). Pour calculer le décalage cumulé, nous admettons que pendant la durée de l'expérience (t_1 à t_3), le mouvement du satellite est képlérien (fig. 17b).

3. Les horloges ne coïncident pas (type c). La durée de la mesure est suffisamment brève pour que l'on puisse considérer la vitesse des sources comme constante et le décalage instantané (fig. 17c).

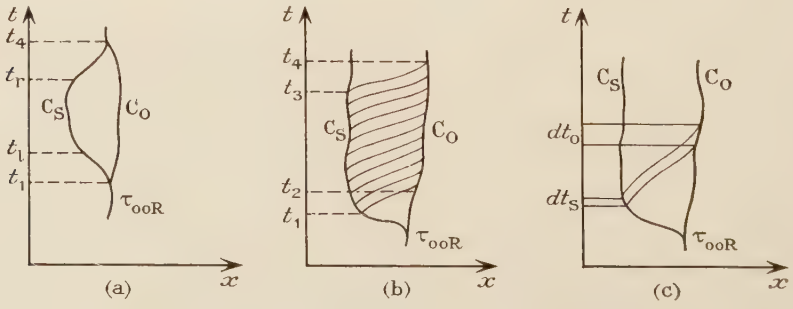


Fig. 17.

Pour le calcul de ces décalages, nous utilisons la métrique de Schwarzchild et limitons les développements par rapport à ε aux termes d'ordre égal ou inférieur à 2. [Dans le champ terrestre, on a $(\mu/c^2 R_0) \simeq \varepsilon^2$, $v_s/c \simeq \varepsilon$, $v_0/c < \varepsilon$.]

1. **Type** a. **Décalage cumulé.** — Considérons d'abord le premier type d'expériences, celui où les horloges source et observateur coïncident au début et à la fin de l'expérience (fig. 17a).

D'après (3-11), le terme de décalage s'écrit [4]

$$(3\text{-}16) \qquad D\tau_{so} - D\tau_{oo} = \int_{t_1}^{t_4} \left[(d\tau_{ss}/d\tau_{oo}) - 1 \right] d\tau_{oo} .$$

Dans le champ de Schwarzschild, on a

$$(3\text{-}17) \qquad \frac{d\tau_{ss}}{d\tau_{oo}} = \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{2\,\mu}{r_s} + v_s^2 \right) \right]^{1/2} \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{2\,\mu}{R_0} + v_0^2 \right) \right]^{-1/2}$$

et le décalage a la valeur

$$(3\text{-}18) \qquad D\tau_{so} - D\tau_{oo} = \int_{t_1}^{t_4} \frac{1}{c^2} \left[\mu \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r_s} \right) + \frac{1}{2} (v_0^2 - v_s^2) \right] d\tau_{oo} + O(\varepsilon^3) .$$

Utilisons la définition suivante de l'énergie E_s (par unité de masse) du satellite à un instant donné :

$$(3\text{-}19) \qquad E_s = -\,\mu/2\,a_s = \tfrac{1}{2}\, v_s^2 - (\mu/r_s) ,$$

où a_s est le demi-grand axe de l'orbite osculatrice correspondant aux valeurs instantanées de la vitesse et de la position du satellite.

Le décalage peut se mettre sous la forme

$$(3\text{-}20) \qquad D\tau_{so} - D\tau_{oo} = \frac{1}{c^2} \int_{t_1}^{t_4} \left[\frac{v_0^2}{2} + \frac{\mu}{R_0} \left(1 - \frac{2\,R_0}{r_s} + \frac{R_0}{2\,a_s} \right) \right] d\tau_{oo} .$$

L'évaluation de l'intégrale de t_1 à t_1 et de t_r à t_4 (fig. 16a) ne peut être faite que dans des cas particuliers et, pratiquement, avec une précision relative inférieure à celle du terme principal t_1 à t_r. Pour cette raison, nous allons omettre la contribution de ces intégrales $\int_{t_1}^{t_1}$ et $\int_{t_r}^{t_4}$ au décalage observable. Nous tiendrons cependant compte de l'erreur alors introduite dans le calcul de ce même décalage. Ainsi la relation (3-11) s'écrit maintenant

$$(3\text{-}21) \qquad D\tau_{so} - D\tau_{oo} = (1 - c^2) \int_{t_1}^{t_4} \frac{v_0^2}{2}\, d\tau_{oo} +$$

$$+ \frac{1}{c^2} \int_{t_1}^{t_r} \frac{\mu}{r_0} \left(1 - \frac{2\,R_0}{r_s} + \frac{R_0}{2\,a_s} \right) d\tau_{oo} \pm$$

$$\pm \frac{\mu}{c^2\,R_0} \left\{ \int_{t_1}^{t_1} + \int_{t_r}^{t_4} \right\} \left(1 - \frac{2\,R_0}{r_s} + \frac{R_0}{2\,a_s} \right) d\tau_{oo} \pm \int_{t_1}^{t_4} d\tau_{oo}\, E\left(\frac{\nu_{ss}}{\nu_{oo}} \right) .$$

Nous évaluerons séparément les termes de décalage [premier et deuxième termes de (3-21)] et les termes d'erreur [troisième et quatrième termes de (3-21)].

[4] (3-11) comporte un terme de décalage et un terme d'erreur. Pour alléger l'écriture, nous évaluerons séparément ces deux termes. Ainsi, nous omettons le terme d'erreur dans (3-16) à (3-20) et (3-28).

1. Termes de décalage. — Dans l'expérience présente, le module de la vitesse de l'observateur est constant (dans le système choisi $oxyz$, défini au début du chap. I). L'évaluation du premier terme du décalage (3-21) est immédiate.

Pour évaluer le second, il est utile d'exprimer la quantité a_s/r_s en fonction de l'anomalie moyenne du satellite. Au premier ordre par rapport à l'excentricité, on a

$$a_s/r_s = 1 + e_s \cos l + O(e_s^2) . \tag{3-22}$$

En première approximation, l'orbite est stationnaire et entre les limites t_1 et t_r, a_s est constant. L'intégration du second terme de (3-21) donne alors

$$\int_{t_1}^{t_r} \left(1 - \frac{2R_0}{r_s} + \frac{R_0}{2a_s}\right) d\tau_{00} = \tag{3-23}$$

$$= D\tau_{00} \frac{R_0}{a_s} \left\{ \frac{a_s}{R_0} - \frac{3}{2} - \frac{2a_s}{n R_0 D\tau_{00}} \left[e_s \mid \sin l \mid_{l_1}^{l_r} + O(e_s^2) \right] \right\} .$$

2. Termes d'erreur. — Evaluons maintenant le premier terme d'erreur probable dans (3-21). On a d'abord $R_0/r_s \leqq 1$. De plus, la valeur minimum de a_s correspond à la valeur minimum de l'énergie $E = -\mu/2\, a_s$, l'énergie au départ. A ce moment, $E_{t1} = -\mu/2\, a_s = -\mu/R_0$ et $a_s = R_0/2$. Ainsi le module de l'intégrant ne dépasse pas

$$| 1 - (2R_0/r_s) + (R_0/2a_s) | \leqq 2 \tag{3-24}$$

et

$$\left\{ \int_{t_1}^{t_1} + \int_{t_r}^{t_4} \right\} \left(1 - \frac{2R_0}{r_s} + \frac{R_0}{2a_s}\right) d\tau_{00} \leqq \tag{3-25}$$

$$\leqq 2 (\tau_{004} - \tau_{00r} + \tau_{001} - \tau_{001}) ,$$

où τ_{001}, τ_{001}, τ_{00r} et τ_{004} sont les instants (tels qu'indiqués par l'horloge de l'observateur terrestre) du début du lancement (t_1, fig. 17a), du début et de la fin du mouvement képlérien (t_1 et t_r, fig. 17a) et de la récupération de l'horloge sur Terre (t_4).

D'après (3-9), la quantité $E(\nu_{ss}/\nu_{00})$ n'est pas constante au cours du temps. Nous pouvons encore évaluer la valeur maximum du second terme d'erreur de (3-21) à partir de la valeur maximum de l'intégrant. En pratique α croît avec le temps. Dans le cas présent, sa valeur maximum est $\alpha_{(\tau_{004}-\tau_{00R})}$ et on a

$$\int_{t_1}^{t_4} E\left(\frac{\nu_{ss}}{\nu_{00}}\right) d\tau_{00} \leqq D\tau_{00} \left[\frac{E(\nu)}{\nu} + (\alpha_s + \alpha_0)_{(\tau_{004}-\tau_{00R})} \right] . \tag{3-26}$$

L'expression complète du décalage est enfin

$$\frac{D\tau_{s0} - D\tau_{00}}{D\tau_{00}} = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{v_0^2}{2} + \right. \tag{3-27}$$

$$\left. + \frac{\mu}{a_s} \left[\frac{a_s}{R_0} - \frac{3}{2} - \frac{2a_s}{n\, D\tau_{00}\, R_0} \left(e_s \mid \sin l \mid_{l_1}^{l_r} + O(e_s^2) \right) \right] \right\} \pm$$

$$\pm \left[\frac{E(\nu)}{\nu} + (\alpha_s + \alpha_0)_{(\tau_{004}-\tau_{00R})} + \frac{2\mu}{c^2 R_0 D\tau_{00}} (\tau_{004} - \tau_{00r} + \tau_{001} - \tau_{001}) \right] .$$

La valeur du décalage y est exacte à $O(\varepsilon^3)$ et $O(\varepsilon^2)$ ($e_s^2/n\, D\tau_{00}$). Nous avons indiqué la valeur maximum de l'erreur probable.

Nous pouvons constater que dans cette expression du décalage n'apparaît aucun terme classique. C'est le principal avantage de ce type d'expériences. Si nous négligeons les termes en excentricité, nous pouvons constater que le décalage total peut être nul pour une certaine valeur de a_S/R_0. Dans le cas présent, quelle que soit la latitude de l'observateur (car v_0/c est faible), cette valeur est de l'ordre de 3/2.

2. **Type** b. **Décalage cumulé.** — Considérons maintenant le second type d'expériences (fig. 17b) où les horloges ne coïncident ni au début ni à la fin de l'expérience. D'après (3-11), le terme de décalage peut s'écrire

$$(3\text{-}28) \qquad D\tau_{SO} - D\tau_{OO} = \int_{t_1}^{t_2} d\tau_{SS} - \int_{t_3}^{t_4} d\tau_{SS} + \int_{t_2}^{t_4} \left(\frac{d\tau_{SS}}{d\tau_{OO}} - 1 \right) d\tau_{OO} .$$

Nous évaluerons les intégrales de t_1 à t_2 et de t_3 à t_4 dont la contribution est faible, à la seule précision $O(\varepsilon^2)$. Nous reporterons l'erreur introduite par cette approximation [différente de celle $O(\varepsilon^3)$ que nous avons adoptée en général] dans le terme d'erreur probable. Ainsi (3-11) s'écrira

$$(3\text{-}29) \qquad D\tau_{SO} - D\tau_{OO} = \int_{t_1}^{t_2} d\tau_{SS} - \int_{t_3}^{t_4} d\tau_{SS} + \int_{t_2}^{t_4} \left(\frac{d\tau_{SS}}{d\tau_{OO}} - 1 \right) d\tau_{OO} \pm$$
$$\pm \left\{ \int_{t_2}^{t_4} d\tau_{OO}\, E\left(\frac{\nu_{SS}}{\nu_{OO}} \right) + \frac{\mu}{c^2 R_0} \left[\int_{t_1}^{t_2} d\tau_{SS} - \int_{t_3}^{t_4} d\tau_{SS} \right] \right\} .$$

1. Termes de décalage. — A l'approximation classique $O(\varepsilon^2)$, on a

$$(3\text{-}30) \qquad \int_{t_1}^{t_2} d\tau_{SS} - \int_{t_3}^{t_4} d\tau_{SS} = (t_2 - t_1) - (t_4 - t_3) = c^{-1} (n_i\, d_i - n_f\, d_f) ,$$

où d_i, d_f sont les distances source-observateur (au sens classique) initiale et finale, n_i, n_f sont les indices moyens du milieu sur les parcours des premier et dernier signaux.

Le troisième terme de décalage en (3-29) est analogue au décalage (3-16). Dans le cas présent, l'orbite est supposée stable entre les limites d'intégration t_2 et t_4 comme c'était le cas entre t_1 et t_r [(3-21) et (3-23)]. On a donc, par analogie avec (3-27),

$$(3\text{-}31) \qquad \int_{t_2}^{t_4} \left(\frac{d\tau_{SS}}{d\tau_{OO}} - 1 \right) d\tau_{OO} = \frac{D\tau_{OO}}{c^2} \left\{ \frac{v_0^2}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu}{a_S} \left[\frac{a_S}{R_0} - \frac{3}{2} - \frac{2\, a_S}{n\, R_0\, D\tau_{OO}} \left(e_S \left| \sin l \right|_{l_2}^{l_4} + O(e_S^2) \right) \right] \right\} .$$

2. Terme d'erreur probable. — Tout comme en (3-26), nous pouvons écrire ici,

$$(3\text{-}32) \qquad \int_{t_2}^{t_4} E\left(\frac{\nu_{SS}}{\nu_{OO}} \right) d\tau_{OO} \leqq D\tau_{OO} \left[\frac{E(\nu)}{\nu} + (\alpha_S + \alpha_O)_{(\tau_{OO4} - \tau_{OOR})} \right]$$

et, d'après l'évaluation (3-30), le terme d'erreur provenant de l'approximation faite sur les intégrales de t_1 à t_2 et de t_3 à t_4 a la valeur

$$(3\text{-}33) \qquad \frac{\mu}{c^2 R_0} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} d\tau_{SS} - \int_{t_3}^{t_4} d\tau_{SS} \right\} \simeq \frac{\mu}{c^3 R_0} (n_i\, d_i + n_f\, d_f) .$$

L'expression complète du décalage cumulé est alors,

$$(3\text{-}34)\qquad \frac{D\tau_{s0} - D\tau_{00}}{D\tau_{00}} = \frac{n_i\, d_i - n_f\, d_f}{c\, D\tau_{00}} + \\ + \frac{1}{c^2}\left\{ \frac{v_0^2}{2} + \frac{\mu}{a_s}\left[\frac{a_s}{R_0} - \frac{3}{2} - \frac{2\, a_s}{n\, D\tau_{00}\, R_0}\, (e_s \mid \sin l \mid_{l_2}^{l_1} + O(e^2)) \right] \right\} \pm \\ \pm \left[\frac{E(\nu)}{\nu} + (\alpha_s + \alpha_0)_{(\tau_{00i} - \tau_{00R})} + \frac{\mu}{c^2\, R_0\, D\tau_{00}} (n_i\, d_i + n_f\, d_f) \right],$$

où la valeur du décalage est exacte à $O(\varepsilon^3)$ ou $O(\varepsilon^2\, e_s^2/n\, D\tau_{00})$. La valeur maximum de l'erreur probable est donnée.

Le premier terme du décalage est l'analogue de l'effet Doppler classique. Il correspond au fait que la distance source-observateur n'est pas la même aux instants initial et final. Le second terme est d'origine purement relativiste et, comme dans le cas précédent, s'annule pour des valeurs de a_s/R_0 voisines de 3/2. L'importance relative du terme classique diminue si on prolonge la durée de l'expérience.

3. **Type c. Décalage instantané.** — Considérons enfin le troisième type d'expérience (fig. 17c). Il consiste en une mesure instantanée du décalage de fréquences de deux horloges en mouvement dans un champ de gravitation.

M^me^ M.-A. Tonnelat [63] calcule ce décalage en évaluant la quantité dt_s/dt_0 (3-13) dans l'hypothèse d'un univers stationnaire et dans le cas où une seule des horloges est en mouvement.

J. L. Synge ([61] p. 299), pour sa part, évalue le décalage à partir de la valeur $(p_\mu)_0\, v_0^\mu$ de l'énergie du photon (d'impulsion p_μ) pour un observateur de vitesse v_0^μ. L'impulsion à la mesure $(p_\mu)_0$ s'obtient par transport parallèle de l'impulsion $(p_\mu)_s$ à l'émission. Le résultat approché à $O(\varepsilon^3)$ est valable dans un univers non stationnaire et pour des vitesses quelconques des horloges.

Nous pouvons retrouver les résultats de M^me^ M.-A. Tonnelat et de J. L. Synge à une précision limitée [$O(\varepsilon^3)$ et univers stationnaire] à partir de la seule condition suivante : l'expression générale du décalage, exprimée (comme dans les deux cas cités) sous la forme d'un développement en série de ε, limité à $O(\varepsilon^3)$ ([5]) doit redonner, à cette précision, les décalages exacts :

a) prévus par la relativité générale lorsque la source et l'observateur sont en repos ;

b) prévus par la relativité restreinte lorsque le champ gravitationnel est nul.

Ces deux derniers décalages sont bien connus.

1. Décalage statique en relativité générale. — Reportons-nous à la relation (3-13). Si l'univers est stationnaire et les horloges fixes, on a $dt_s = dt_0$. D'autre part, $d\tau/dt = \sqrt{g_{00}}$ et, si $g_{00} - 1$ est de l'ordre de ε^2, le décalage est égal à

$$(3\text{-}35)\qquad (\nu_{s0} - \nu_{ss})/\nu_{ss} = \tfrac{1}{2}\left[(g_{00})_s - (g_{00})_0\right],$$

([5]) c'est-à-dire le développement $(\nu_{s0} - \nu_{ss})/\nu_{ss} = \alpha\,\varepsilon + \beta\,\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$, où α et β sont déterminés en égalant pour deux cas précis cette expression aux résultats exacts connus en relativité générale (décalage statique) et en relativité restreinte (décalage cinématique).

où $(g_{00})_S$ et $(g_{00})_o$ sont les valeurs de g_{00} aux points source et observateur.

2. Décalage cinématique en relativité restreinte. — Si le champ gravitationnel est nul, le décalage mesurable dans le repère lié à l'observateur (indice o) est (Møller [44] p. 62)

$$(3\text{-}36) \qquad \left[(\nu_{so} - \nu_{ss})/\nu_{ss}\right]_o = \left\{1 - \left[(v_s^2)_o/c^2\right]\right\}^{1/2} \left\{1 - \left[(\vec{e}\,.\,\vec{v}_s)_o/c\right]\right\}^{-1},$$

où $\vec{e}$ est la direction de propagation des rayons lumineux.

Nous ne pouvons utiliser directement cette expression. En effet, la vitesse des horloges et leur position (direction des rayons lumineux) nous sont données pas des mesures astronomiques, dans un repère lié au centre de la Terre. Nous devons ainsi exprimer $(v_s^2)_o$ et $(\vec{e}\,.\,\vec{v}_s)_o$ en fonction des quantités mesurables dans le repère utilisé $\vec{e}$, $\vec{v}_s$ et $\vec{v}_o$.

Après une transformation de Lorentz, nous trouvons

$$(3\text{-}37) \qquad \left(\frac{\nu_{so} - \nu_{ss}}{\nu_{ss}}\right)_o = \frac{1 - (\vec{e}\,.\,\vec{v}_o/c)}{1 - (\vec{e}\,.\,\vec{v}_s/c)} \left[\frac{1 - (v_s^2/c^2)}{1 - (v_o^2/c^2)}\right]^{1/2} - 1 .$$

3. Décalage approché en relativité générale. — Dans le champ de Schwarzschild, les termes mixtes $(\vec{v}_s/c)$ $(\mu/c^2 r_s)$ sont d'ordre égal ou supérieur à 3. A $O(\varepsilon^3)$, le décalage se réduit ainsi à la simple addition des décalages (3-34) et (3-37). Si nous tenons compte des termes d'erreur probable (3-15) et de la relation du mouvement képlérien (3-19), le décalage observable est le suivant (nous omettrons maintenant l'indice o) :

$$(3\text{-}38) \qquad \frac{\nu_{so} - \nu_{oo}}{\nu_{oo}} = \frac{\vec{e}.(\vec{v}_s - \vec{v}_o)}{c} + \frac{(\vec{e}\,.\,\vec{v}_s)\left[\vec{e}\,.\,(\vec{v}_s - \vec{v}_o)\right]}{c^2} + \frac{v_o^2}{2c^2} + \\ + \frac{\mu}{c^2 R_0}\left(1 - \frac{2R_0}{r_s} + \frac{R_0}{2a_s}\right) \pm E\left(\frac{\nu_{ss}}{\nu_{oo}}\right) .$$

Les quantités qui apparaissent au second membre s'entendent au sens classique. La première, la plus importante de façon générale, correspond à l'effet Doppler classique.

IX. **Conditions d'observation**

Nous expliciterons maintenant, pour chacun des trois cas envisagés, les conditions (1) et (2) relatives à la précision des prévisions théoriques et des mesures expérimentales.

1. **Type a. Décalage cumulé.** — Reportons-nous à la relation (3-27) donnant la valeur du décalage dans le premier type d'expériences. Le terme de décalage est du deuxième ordre et peut être évalué avec une imprécision relative de l'ordre de 10^{-5}. L'erreur résiduelle ne peut donc limiter sensiblement la précision des prévisions. Les limitations qu'impose le terme d'erreur sont [condition (1)]

$$(3\text{-}39) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad E(\nu)/\nu \leqq \text{x}\, 10^{-2}\, A\, B\,, \\ \text{b)} \quad (\alpha_s + \alpha_o)_{(\tau_{004} - \tau_{00R})} \leqq \text{x}\, 10^{-2}\, A\, B\,, \\ \text{c)} \quad (\tau_{004} - \tau_{00r} + \tau_{001} - \tau_{001})/\mathrm{D}\tau_{00} \leqq \tfrac{1}{2}\, \text{x}\, 10^{-2}\, B\,, \end{cases}$$

où

$$A = \mu/c^2\, R_0 = 0{,}7\times10^{-9}\,, \quad B = 1 - (R_0/a_s)\,.$$

La précision des observations doit être telle que l'on ait [condition (2)]

$$E(D\tau_{so} - D\tau_{oo})/D\tau_{oo} \leqq x\,10^{-2}\,A\,B\,. \tag{3-40}$$

Discussion. — Signalons d'abord que la valeur $a_s = R_0$ est exclue. Ceci correspond au fait que pour cette valeur, le décalage gravitationnel est nul. Dans le reste de la discussion, nous admettrons que $R_0/a_s \simeq 1$.

La précision dans la synchronisation des horloges peut facilement atteindre 10^{-11} (à 300 MHz, le déphasage correspondant est de 30° après 0,5 mn et, par conséquent, décelable). Ainsi la condition (3-39a) est facilement satisfaite pour x aussi faible que 1 (vérification avec une incertitude de 1 %).

La condition (3-39b) [où $B \simeq 1$] est la plus restrictive. Si nous négligeons l'instabilité de l'horloge au sol ($\alpha_0 = 0$) qui peut être de meilleure qualité que celle que transporte le satellite, seule l'instabilité de cette dernière intervient. Les oscillateurs actuellement utilisés dans les satellites ont une stabilité de l'ordre de 10^{-9}, ce qui est insuffisant ici.

La durée de la mise en orbite et de la récupération d'un satellite peut être inférieure à 1 h. Ainsi, toujours pour x = 1, la condition (3-39c) est satisfaite pour une durée de l'expérience aussi faible que 2 j.

De même, l'évaluation du décalage observable à la précision requise (3-40) ne pose aucune difficulté. En effet, pour une même durée de l'expérience, si x = 1, le second membre de (3-40) vaut $0{,}7\times10^{-11}$. L'erreur dans la mesure du temps écoulé pour l'horloge récupérée doit être inférieure à 10^{-6} s. Cette précision est facilement atteinte en laboratoire.

2. **Type** b. **Décalage cumulé.** — Le décalage cumulé nous est donné en (3-34). Comme dans le cas précédent, le terme relativiste peut être calculé avec une imprécision de l'ordre de 10^{-5} et nous négligeons l'erreur résiduelle sur ce terme. Ecrivons les conditions (1) en négligeant les termes en excentricité qui apparaissent au second membre :

$$\begin{cases} \text{a)} & E(\nu)/\nu \leqq x\,10^{-2}\,A\,B\,, \\ \text{b)} & (\alpha_s + \alpha_0)_{(\tau_{OOA} - \tau_{OOR})} \leqq x\,10^{-2}\,A\,B\,, \\ \text{c)} & E(n) \leqq \tfrac{1}{2}\,x\,10^{-2}\,D\tau_{oo}\,A\,B\,c\,, \\ \text{d)} & E(d) \leqq \tfrac{1}{2}\,x\,10^{-2}\,D\tau_{oo}\,A\,B\,c\,, \\ \text{e)} & d_i,\, d_f \leqq x\,10^{-2}\,D\tau_{oo}\,B\,c\,, \end{cases} \tag{3-41}$$

où d est la distance source-observateur. Comme dans le cas précédent, la précision des observations doit être telle que (3-40) soit satisfaite.

Discussion. — Ajoutons simplement ici que, compte tenu de $E(n) < 10^{-6}$, les conditions (3-41c) et (3-41e) sont moins restrictives que (3-41d) qui peut toutefois être satisfaite pour une durée de l'expérience aussi brève que 24 h, car $E(d)/d \simeq 10^{-5}$.

3. **Type** c. **Décalage instantané.** — Dans le terme de décalage de la relation (3-38) apparaît un terme du premier ordre sur lequel l'erreur probable peut être importante. L'erreur sur les décalages du deuxième ordre est toujours négligeable.

Si nous définissons $v_r = \vec{e} \cdot (\vec{v_s} - \vec{v_o})$, la précision des données et mesures doit être telle que l'on ait [conditions (1) et (2)]

$$\text{(3-42)} \qquad \begin{cases} \text{a)} & E(\nu)/\nu \leqq \text{x}\ 10^{-2}\ A\ B\ , \\ \text{b)} & (\alpha_s - \alpha_o)_{(\tau_{00I} - \tau_{00R})} \leqq \text{x}\ 10^{-2}\ A\ B\ , \\ \text{c)} & E(v_r) \leqq \text{x}\ 10^{-2}\ A\ B\ c\ , \end{cases}$$

$$\text{(3-43)} \qquad E\left[(\nu_{so} - \nu_{oo})/\nu_{oo}\right]_{o\ \text{mesuré}} \leqq \text{x}\ 10^{-2}\ A\ B\ .$$

Discussion. — Les conditions (3-42a,b) suggèrent les mêmes remarques que (3-39a,b). Les deux suivantes sont ici très restrictives et ne peuvent être satisfaites compte tenu de l'imprécision actuelle des mesures de v_r ($\pm\ 10^3$ cm/s) et des mesures de décalage ($\pm\ 10^{-8}$). Il est cependant possible d'éviter cette difficulté.

1. Elimination de l'effet Doppler classique. — Pour éviter l'apparition d'un effet Doppler du premier ordre, Badessa, Kent & Nowel [1] suggèrent le procédé suivant : le signal émis par l'observateur est reçu dans le satellite, il y est mélangé au signal émis par la source dans le satellite, la résultante est réémise en direction de l'observateur terrestre qui la compare au signal qu'il avait envoyé.

Soit ν'_{ss} la résultante du mélange telle que la mesure l'observateur dans le satellite et ν_{os} la fréquence apparente de la source terrestre pour cet observateur. Définissons K_{os} et K_{so} par

$$\text{(3-44)} \qquad \nu_{os} = (1 + K_{os})\ \nu_{oo}\ , \qquad \nu_{so} = (1 + K_{so})\ \nu'_{ss}\ ;$$

la résultante du mélange est

$$\text{(3-45)} \qquad \nu'_{ss} = 2\ \nu_{ss} - \nu_{os} = \nu_{ss} - K_{os}\ \nu_{oo} + \nu_{ss} - \nu_{oo}\ .$$

A la réception, le décalage observable est

$$\text{(3-46)} \qquad (\nu_{so} - \nu_{oo})/\nu_{oo} = K_{so} - K_{os} - K_{so}\ K_{os} + \\ + \left[2(1 + K_{so})\ (\nu_{ss} - \nu_{oo})/\nu_{oo}\right].$$

Les coefficients K_{so} et K_{os} se déduisent des relations inverses de (3-44) et de la valeur du décalage instantané (3-38). A $O(\varepsilon^3)$ le décalage observable

$$\text{(3-47)} \qquad \frac{\nu_{so} - \nu_{oo}}{\nu_{oo}} = \frac{2}{c^2}\left\{\frac{v_o^2}{2} + (\vec{e}.\vec{v_o})\ \left[\vec{e}.(\vec{v_s} - \vec{v_o})\right] - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{R_0}\left(1 + \frac{R_0}{2\,a_s} - \frac{2\,R_0}{r_s}\right)\right\} \pm 2\,E\left(\frac{\nu_{ss}}{\nu_{oo}}\right)$$

ne contient que des termes du deuxième ordre.

Ce procédé de mélange permet ainsi d'éviter la condition (3-42c). De plus, parce que l'effet Doppler sur l'onde incidente n'est plus que du deuxième ordre et varie lentement, sa mesure expérimentale est plus facile et on peut penser qu'il serait possible de satisfaire la condition (3-43). Nous avons vu précédemment que (3-42a) peut être satisfaite facilement, ainsi seule subsiste (3-42b) concernant la stabilité des horloges. Il est plus facile de satisfaire cette condition dans le type d'expériences suivant.

2. Mesure d'une différence de décalage. — Considérons l'expérience suggérée par M^me^ M.-A. Tonnelat [63], expérience où l'on mesure la différence des décalages observables pour deux positions différentes du satellite sur son orbite. Utilisons toujours le procédé de mélange de fréquences.

A l'approximation newtonienne $r = a_s\,(1 - e_s^2)/(1 + e_s \cos f)$, la différence des décalages (3-47) correspondant aux deux valeurs f_a et f_b de l'anomalie vraie du satellite est

$$(3\text{-}48)\qquad \left.\frac{\nu_{so} - \nu_{oo}}{\nu_{oo}}\right|_a^b = \frac{4\,\mu}{c^2\,R_0}\,\frac{R_0}{R_0 + h}\,\frac{e_s}{1 + e_s}\left(\cos f\Big|_b^a\right) + \\ + \frac{2}{c^2}\left[(\dot{e}.\vec{v}_o)\,\left[\dot{e}.(\vec{v}_s - \vec{v}_o)\right]\right]_b^a \pm 2\,(\alpha_s + \alpha_o)_{(\tau_{oob} - \tau_{ooa})}\,,$$

où h est l'altitude du périgée mesurée à partir de la surface terrestre.

On peut remarquer que maintenant, seule intervient l'instabilité α des horloges sur l'intervalle de temps séparant les deux mesures, intervalle de temps qui peut être court (< 1 h). La condition (3-42b) s'écrit maintenant

$$(3\text{-}49)\qquad (\alpha_o + \alpha_s)_{(\tau_{oob} - \tau_{ooa})} \leqq x\,10^{-2}\,\frac{\mu}{c^2\,R_0}\,\frac{R_0}{R_0 + h}\,\frac{e_s}{1 + e_s}\left(\cos f\Big|_b^a\right),$$

où $\mu/c^2\,R_0 = 0{,}693 \times 10^{-9}$. Il est ainsi avantageux de choisir une forte excentricité de l'orbite et une faible altitude du périgée.

Discussion. — Limitons-nous aux mesures pour lesquelles le satellite est à plus de 30° au-dessus de l'horizon (vision directe). Si l'orbite est polaire, l'altitude du périgée de 1 000 km et les latitudes du périgée β_p et de l'observateur β_o telles que $\beta_o = \beta_p + 90°$; aux excentricités 0,1 ; 0,3 ; 0,5 et 0,9 correspondent des décalages gravitationnels (termes en g_{00}) de 0,57 ; 2,4 ; 4,1 et $7{,}5 \times 10^{-10}$, des seconds membres de (3-49) de x (0,28 ; 1,2 ; 2,1 ; 3,7) 10^{-12} et des intervalles de temps entre les mesures de 10 à 50 mn. La stabilité d'une horloge à quartz sur d'aussi courtes périodes est de l'ordre de 5×10^{-12} et suffisante pour une observation de l'effet gravitationnel avec une imprécision de l'ordre de 1 %.

4. **Conclusion.** — Nous avons étudié dans cette troisième partie les possibilités d'observation de décalages non statiques prévus par la relativité générale. Nous avons explicité les conditions relatives à la précision des prévisions théoriques et des mesures expérimentales pour trois types d'expériences réalisables à l'aide de satellites artificiels terrestres. Nous avons discuté enfin les possibilités actuelles de détection des effets relativistes. Dans les trois types d'expériences, il est possible ou bien d'éviter l'apparition d'effets classiques importants ou bien d'en tenir compte avec suffisamment de précision. Cependant la stabilité tout juste suffisante des horloges utilisables dans les satellites autorise actuellement la seule observation des différences de décalages gravitationnels.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons envisagé trois types d'expériences susceptibles de mettre en évidence les effets relativistes

a) du champ de Schwarzschild,

b) de la rotation du corps central,

c) du champ gravitationnel d'un troisième corps.

Ces types d'expériences sont les suivants :

a) observation du mouvement orbital d'un satellite terrestre,

b) observation du mouvement de précession de l'axe de rotation d'un gyroscope dans un satellite,

c) mesure du décalage des fréquences de deux sources dont l'une est sur Terre, l'autre dans un satellite.

Nous avons étudié les perturbations classiques qui se superposent aux effets relativistes.

Nous en avons déduit des relations qui nous permettent dans chacun des cas,

a) d'évaluer les possibilités de mettre en évidence un effet relativiste donné, si les paramètres du mouvement nous sont connus,

b) de déterminer la valeur des paramètres du mouvement la plus favorable à la mise en évidence d'un effet relativiste,

compte tenu de la précision

a) avec laquelle nous connaissons les paramètres caractéristiques des facteurs de perturbation,

b) possible dans la mesure expérimentale des paramètres du mouvement et de leurs variations.

Comme application, nous avons examiné les possibilités d'observation d'effets relativistes dans les trois types d'expériences envisagés, compte tenu de la précision actuelle des mesures et des données expérimentales concernant les facteurs de perturbation. Nous pouvons en déduire que :

1° il est impossible actuellement de tenir compte des perturbations classiques du mouvement orbital d'un satellite terrestre avec suffisamment de précision pour espérer mettre en évidence les mouvements relativistes du périgée et du nœud dus au champ de Schwarzschild, à la rotation de la Terre sur elle-même et au champ solaire ; par contre, si l'inclinaison initiale de l'orbite est proche de 90° ($\pm$ 3′), le demi-grand axe compris entre 2,5 et 3,6 R_0 et la longitude du nœud bien choisie (en fonction des mouvements de l'orbite lunaire pendant la période d'observation),

a) il existe une variation d'origine relativiste de l'inclinaison ; au bout de 10 ans, cet effet, cumulatif, atteint 0,076″, quantité du même ordre de grandeur que l'erreur probable des mesures de l'inclinaison ;

b) les variations classiques de l'inclinaison, dues aux champs lunaire et solaire et aux marées terrestres, sont très faibles (0,3′/an) ; il est possible d'en tenir compte avec une précision suffisante pour observer l'effet relativiste à 10 % près ;

c) les autres effets classiques (« effets de chocs ») sont mal connus ; l'utilisation d'un satellite double (deux satellites l'un dans l'autre) permettrait de les calculer directement (par liaison élastique des deux satellites) ou de les éliminer (satellite extérieur à trajectoire corrigée, formant écran) ;

2° si le gyroscope expérimental, logé dans un satellite terrestre, est

un solide à symétrie de révolution,

d'aplatissement faible ($\leqq$ 0,02),

animé d'une vitesse de rotation élevée ($\geqq$ 100 révolutions/s),

il est possible de tenir compte des mouvements classiques de son axe de rotation dus au champ gravitationnel terrestre avec une précision suffisante pour mettre en évidence, à 10 % près, des effets relativistes de précession (effets dus au champ de Schwarzschild et à la rotation de la Terre sur elle-même) ; ces effets relativistes

sont cependant petits ($\simeq 8$ et 0,3″/an). Aussi, pour que l'effet soit mesurable à 10 % près, la durée de l'expérience doit être de l'ordre de 10 j dans le premier cas et de 200 j dans le second si la précision des observations atteint 0,01″ ;

3° la stabilité des oscillateurs actuellement utilisables dans les satellites autorise la seule observation des différences de décalages instantanés prévus par la relativité générale. A cette restriction près cependant, il est possible de prévoir l'effet observable avec une erreur probable 100 fois plus petite que l'effet relativiste si :

les mesures de décalage total (récupération de l'horloge sur terre en fin d'expérience) ou cumulé pendant plusieurs révolutions du satellite, portent sur des périodes égales ou supérieures à 24 h,

on évite l'apparition d'effets Doppler du premier ordre dans les mesures de décalage instantané par mélange de fréquences.

D'autre part, il est possible de mesurer un éventuel effet relativiste avec une incertitude de 1 %.

Constantes numériques

Vitesse de la lumière dans le vide, $c = 2{,}997\,925 \times 10^{10}$ cm/s ;
aplatissement terrestre, $J_{2,0} = 1\,082{,}3 \times 10^{-6}\ R_0^2$;
nombre de Love, $k = 0{,}3$;
masse de la Lune, $M_L = (1/81{,}30)$ masse terrestre M_T ;
masse du Soleil, $M_S = 332\,945$ masses terrestres M_T ;
$n_0 = (G\ M_T/R_0^3)^{1/2} = 17{,}043\,37$ rév./j ;
moyen mouvement de la Lune, $n_L = 0{,}229\,98$ rd/j ;
moyen mouvement du Soleil, $n_S = 1{,}720\,2 \times 10^{-2}$ rd/j ;
rayon équatorial terrestre, $R_0 = 6{,}378\,16 \times 10^8$ cm ;
constante de précession, 50,254″/an ;
constante de nutation, 9,200″.

Je remercie Mr Louis de Broglie et Mme M.-A. Tonnelat de m'avoir accueilli au Laboratoire de Théories Physiques.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à Mlle S. Mavridès qui s'est particulièrement intéressée à mon travail et m'a guidé avec beaucoup d'attention.

Merci également aux chercheurs du Bureau des Longitudes qui m'ont fourni des renseignements très utiles.

Je tiens enfin à dire toute ma gratitude au Centre National de la Recherche Scientifique qui m'a permis de poursuivre ces recherches.

Références

[1] R. S. Badessa, R. L. Kent & J. C. Nowell, *Phys. Rev. Letters*, t. **3**, 1959, p. 79.
[2] D. B. Beard, *Astrophys. Jl*, t. **129**, 1959, p. 496.
[3] D. Brouwer, *Astron. Jl*, t. **64**, 1959, p. 378.
[4] H. R. Byers, The earth as a planet, 1954, p. 299.
[5] K. P. Chopra, *Rev. mod. Physics*, t. **33**, 1961, p. 153.
[6] G. L. Clark, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. **43**, 1947, p. 164.
[7] G. E. Cook, *Geophys. Jl*, t. **6**, 1962, p. 1.
[8] G. E. Cook & R. N. A. Plimmer, *Proc. Royal Soc.* [A], t. **258**, 1960, p. 516.
[9] E. Corinaldesi & A. Papapetrou, *Proc. Royal Soc.* [A], t. **209**, 1951, p. 259.

[10] A. Das, *Prog. theor. Physics*, t. **17**, 1957, p. 373.
[11] L. R. Davis & J. M. Williamson, *apud* Space research, éd. North-Holland Publ., Amsterdam, t. **3**, 1963, p. 365.
[12] W. de Sitter, *Proc. Amsterdam Acad.*, t. **19**, 1916, p. 376.
[13] W. de Sitter, *Month. Not. R. astro. Soc.*, t. **77**, 1916, p. 164.
[14] W. de Sitter, *Month. Not. R. astro. Soc.*, t. **81**, 1920, p. 1.
[15] M. Dubin & C. W. McCracken, *Astron. Jl*, t. **67**, 1962, p. 248.
[16] A. S. Eddington, The mathematical theory of relativity, éd. Cambridge Univ. Press, 1923, p. 129.
[17] P. S. Epstein, *Phys. Review*, t. **23**, 1924, p. 710.
[18] A. D. Fokker, *Proc. Amsterdam Acad.*, t. **23**, 1920, p. 729.
[19] B. Garfinkel, *Astron. Jl*, t. **64**, 1959, p. 353.
[20] G. E. O. Giacaglia, *Astron. Jl*, t. **69**, 1964, p. 303.
[21] V. L. Ginzburg, *Ž. eksper. teor. Fiz.*, t. **30**, 1956, p. 213.
[22] I. Harris & W. Priester, *apud* Space research, éd. North-Holland Publ., Amsterdam, t. **3**, 1963, p. 53.
[23] G. S. Hawkins, N. A. S. A. Res. Rep. 2e, 1963.
[24] J. P. Heppener & *al.*, *apud* Space research, éd. North-Holland Publ., Amsterdam, t. **3**, 1963, p. 559.
[25] H. Hinteregger, *Jl geophys. Res.*, t. **66**, 1961, p. 2367.
[26] G. Hori, *Astron. Jl*, t. **65**, 1960, p. 291.
[27] I. G. Izsak, *Nature*, t. **199**, 1963, p. 137.
[28] L. G. Jacchia, *Jl geophys. Res.*, t. **65**, 1960, p. 2275.
[29] L. G. Jacchia, *apud* Space research, éd. North-Holland Publ., Amsterdam, t. **2**, 1961, p. 744.
[30] L. G. Jacchia & J. Slowey, Smithsonian Observ. Special Rep., n° 136, 1963.
[31] H. Jeffreys, Smithsonian Observ. Special Rep., n° 79, 1961.
[32] H. K. Kallmann-Bijl & *al.*, Cospar Intern. reference atmosphere, éd. North-Holland Publ., Amsterdam, 1961.
[33] W. M. Kaula, N. A. S. A. techn. note D1155, 1962.
[34] D. G. King Hele, G. E. Cook & J. M. Rees, *Nature*, t. **197**, 1963, p. 785.
[35] Y. Kosai, Smithsonian Observ. Special Rep., n° 22, 1959.
[36] Y. Kosai, Smithsonian Observ. Special Rep., n° 72, 1961.
[37] Y. Kosai, *Astron. Jl*, t. **67**, 1962, p. 446.
[38] Y. Kosai, Smithsonian Observ. Special Rep., n° 101, 1962.
[39] H. A. Kramers, *Proc. Amsterdam Acad.*, t. **23**, 1920, p. 1070.
[40] G. P. Kuiper, Planets and satellites, éd. Univ. Chicago Press, 1961.
[41] L. La Paz, *Publ. Astron. Soc. Pacific*, t. **66**, 1954, p. 13.
[42] J. Lense & H. Thirring, *Phys. Zeits.*, t. **19**, 1918, p. 156.
[43] P. J. Melchior, *apud* Advances in geophysics, éd. Acad. Press, New York, t. **4**, 1958, p. 391.
[44] C. Møller, The theory of relativity, éd. Clarendon Press, Oxford, 1952.
[45] B. Morando, *C. r. Ac. Sc.*, t. **254**, 1962, p. 635.
[46] P. Musen, *Jl Geophys. Res.*, t. **65**, 1960, p. 1391.
[47] T. N. Nazarova, *apud* Space research, éd. North-Holland Publ., Amsterdam, t. **2**, 1961, p. 639.
[48] H. K. Paetzold & H. Zschöner, *apud* Space research, éd. North-Holland Publ., Amsterdam, t. **2**, 1961, p. 958.
[49] A. Papapetrou, *Proc. Royal Soc.* [A], t. **209**, 1951, p. 248.
[50] D. G. Parkyn, *Jl geophys. Res.*, t. **65**, 1960, p. 9.
[51] F. A. E. Pirani, *Acta. phys. Polon.*, t. **15**, 1956, p. 389.
[52] L. Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris, 1852.
[53] L. I. Schiff, *Phys. Rev. Letters*, t. **4**, 1960, p. 215.
[54] L. I. Schiff, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, t. **46**, 1960, p. 871.
[55] J. A. Schouten, *Proc. Amsterdam Acad.*, t. **21**, 1918, p. 533.
[56] J. A. Schouten, *Proc. Amsterdam Acad.*, t. **23**, 1920, p. 1108.
[57] S. F. Signer, *Phys. Rev. Letters*, t. **1**, 1956, p. 11.
[58] L. B. Slitcher, *Jl geophys. Res.*, t. **68**, 1963, p. 4281.
[59] D. E. Smith, *Planetary & Space Science*, t. **11**, 1963, p. 789.
[60] T. E. Sterne, *Astron. Jl*, t. **63**, 1958, p. 28.
[61] J. L. Synge, Relativity : the general theory, éd. North-Holland Publ., Amsterdam, 1960, p. 298.
[62] M.-A. Tonnelat, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **17**, 1961, p. 59.
[63] M.-A. Tonnelat, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **19**, 1964, p. 79.
[64] G. Veis, Smithsonian Observ. Contributions to Astrophys., t. **3**, 1960, p. 95.
[65] J. P. Vinti, *Jl Res. Bur. Standards* [B], t. **67**, 1963, p. 191.
[66] E. W. Woolard, *Astron. Papers Am. Ephemeris*, t. **15**, 1953, p. 1.
[67] P. J. Wyatt, Smithsonian Observ. Special Rep., n° 63, 1960.
[68] H. von Zeipel, *Arkiv Math., Astron., Fysik*, t. **11**, 1916, p. 1.
[69] I. D. Zhongolovitch, *Inst. Theor. Astron. Moscow*, t. **6**, 1957, p. 505.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

1. Relativité générale et principe d'équivalence 1
2. Relativité générale et équations du champ 2
3. Prévisions et possibilités d'observation 4

PREMIÈRE PARTIE

Etude du mouvement orbital d'un satellite artificiel terrestre 6

I. Conditions d'observation et effets du premier ordre 6

1. Solution théorique 7
2. Possibilité d'observations expérimentales 8

II. Rappel de théorie des perturbations 9

1. Variation des paramètres généraux 10
2. Variation des éléments elliptiques 10
3. Variation des éléments de Delaunay 11

III. Perturbations du mouvement elliptique stable 12

1. Aplatissement terrestre 12
2. Ellipticité de l'équateur terrestre 15
3. Attraction d'un troisième corps 18
4. Marées terrestres 21
5. Précession et nutation terrestres 23
6. Résistance de l'air 24
7. Pression du rayonnement solaire 28
8. Météorites, ceintures de radiations, champ électromagnétique 30
9. Effets orbitaux relativistes 33
10. Discussion des résultats 40

IV. Conditions d'une vérification 42

1. Erreurs probables 43
2. Mouvements relativistes du périgée 43
3. Mouvement relativiste du nœud 44
4. Mouvement de l'inclinaison 46
5. Conclusion 48
6. Note I. Satellites de Jupiter 48
7. Note II. Lune 49

DEUXIÈME PARTIE

Effets gyroscopiques 49

V. Mouvement approché d'un gyroscope 49

1. Mouvement classique 50
2. Mouvement relativiste 54

VI. Conditions d'une vérification 56

1. Condition (1) 56
2. Condition (2) 57
3. Conclusion 57
4. Note. Mouvement de l'axe de rotation terrestre 57

TROISIÈME PARTIE

Décalage de fréquences 58

VII. Décalage de fréquences en relativité générale 58

Stabilité des sources et fréquence propre 59

VIII. Types d'expériences 60

1. Type a. Décalage cumulé 61
2. Type b. Décalage cumulé 63
3. Type c. Décalage instantané 64

IX. Conditions d'observation 65

1. Type a. Décalage cumulé 65
2. Type b. Décalage cumulé 66
3. Type c. Décalage instantané 66
4. Conclusion 68

CONCLUSION

DEUXIÈME THÈSE

Proposition donnée par la Faculté :

« Résultats récents dans les mesures de décalage réalisées en laboratoire au moyen d'effet Mössbauer. »

Vu et approuvé :
Paris, le 23 Mars 1965
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE

LENDER	T	Biologie animale S. P. C. N. (Orsay).
MAGAT	T	Physicochimie des radio-éléments.
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
BENOIT	T	Physio. animale (Orsay).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
LEMÉE	T	Ecologie végétale (Orsay).
GUÉRIN	T	Chimie M. P. C. (Orsay).
CHATELET	T	Chimie P. C. B.
JEAN	T	Physio. nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique S. P. C. N.
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).
BERTEIN	T	Electronique (Orsay).
BOUISSIÈRES	T	Radiochimie.
Mme COUTURE	T	Thermo. et méca. physique.
ELLEMBERGER	T	Géologie des grandes régions du globe (Orsay).
FRANC	T	Biologie animale P. C. B.
SCHNELL		Botanique tropicale.
STLKOWSKI	T	Physiologie végétale.
ACHER	T	Chimie biologique.
BAUDOIN	T	Biologie animale P. C. B.
BEAUMONT		Biologie animale S. P. C. N.
BLAMONT		Géophysique ionosphère.
BOUREAU	T	Botanique.
CURIE D.		Physique M. G. P.
DUBAND DELGA	T	Géologie.
FRÉON	T	Chimie organique (Orsay).
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des probabilités.
CAILLEUX	T	Géologie S. P. C. N.
MAGNAN		Physique électricité.
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appli. à la chimie théo. et à la phy. nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie végétale S. P. C. N.
Mme CHOQUET-BRUHAT		Mécanique analytique et méca. céleste.
Mlle VEIL	T	Physiologie générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Méca. phys. et expérimentale.
LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
BROCHARD	T	Physique P. C. B. (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Math. I (Orsay).
MAZET	T	Méca. géné. (Orsay).
CAIRE		Géogra. physique et géo. dynami.
COMOLET		Méca. des fluides.
CORABŒUF	T	Physio. animale (Orsay).
DELLOUE	T	Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie animale P. C. B.
JULLIEN J.		Chimie S. P. C. N. (Orsay).
MALGRANGE	T	Technique mathé. de la phys. (Orsay).
OLIVIER		Anthropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE	T	Physique E. N. S. (Orsay).
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T	Math. E. N. S. féminines.
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Méca. céleste.
ABELES		Physique S. P. C. N.
AMAT	T	Physique P. C. B.
AUBOIN	T	Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et radio-activité (Orsay).
BOUGIS		Biologie marine Villefranche/Mer.
BRUHAT	T	Math. M. P. C.
BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
CHABBAL	T	Physique M. G. P. (Orsay).
DEHEUVELS	T	Math. propé.
D'ESPAGNAT	T	Physique théorique (Orsay).
FURON	T	Géologie S. P. C. N.
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVES		Biologie végétale P. C. B.
GUILBERT		Physique C. U. S. Orléans.
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biolo. géné.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie P. C. B.
MEYER		Physique propé.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER		Pétrographie.
ROSEAU	T	Méca. théorique des fluides.
ROUBINE		Electronique.
SILBER	T	Chimie P. C. B.
UEBERSFELD	T	Electronique.
YVON	T	Théories physiques.
HERVÉ	T	Mathématiques.
NERON	T	Math. M. P. C. (Orsay).
Mme PECKER WIMEL	T	Astrophysique.
BALKANSKY		Physique M. P. C.
LE CORRE	T	Electricité.
DELCROIX	T	Physique théorique (Orsay).
GOURDIN		Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
LEHMANN	T	Phys. exp. des hautes énergies.
NATAF	T	Physique nucléaire et radio-activité (Orsay).
ECHALIER		Biologie animale P. C. B.
BARRAUD		Physiolo. cellulaire.
LIORET		Physiologie végé. (Orsay).
DARS		Géologie structurale et géolo. appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation).
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle.
BLAQUIÈRE		Electronique (Orsay).
ARNOUS	T	Physique théorique.
TATIBOUET		Chimie (C. S. U. Orléans).
MALLIAVIN	T	Math. propé. (Orsay).
GAUDEMAR		Chimie propé.
PEREZ Y JORBA		Physique Exp. des Hautes énergies (Orsay).
DAVID	T	Chimie (agrégation Orsay).
BROUSSE	T	Mécanique théorique.
ROSCH	T	Astronomie.
GUY	T	Physique expérimentale.
LAZARD		Math. M. P. C.
MOREL Pierre		Physique M. P. C.
ARSAC		Programmation.
LEFEBVRE		Chimie M. P. C.
CHAPEVILLE		Biochimie.
BENOIT		Physique C. P. E. M.
RIO		Chimie C. P. E. M.
JAUZEIN		Géologie E. N. S.
PREVOST Geor.		BV C. P. E. M.
FAVARD P.		BA C. P. E. M.
VILKAS		Chimie C. P. E. M.
Mlle FICINI		Chimie C. P. E. M.
LEQUEUX		Astronomie.
COHEN TANNOUDJI		Physique M. P. C.
TAVERNIER		Physique C. P. E. M.
Mme ROIZEN		» »
DURAND M.		BA S. P. C. N.
PASCAUD		Physiologie.
Mme PETIT		BA C. P. E. M.
BROUSSE		Géologie (Orsay).
CAGNIAC		Physique agrégation (Orsay).
LEBERRE		Zoologie (Orsay).
SCHEFFER		Microbiologie (Orsay).
DE GENNES		Physique des solides (Orsay).
RIOU		Physique nuclé. exp. (Orsay).
CLAUSER		Chimie biol. (Orsay).
CHEVALIER		Physio. animale (Orsay).
JANCOVICI		Physique atomique (Orsay).
FALK-VAIRANT		Physique nucléaire (Orsay).
FETIZON		Chimie propé. Orsay).
CERF		Mathématiques (Orsay).

Le Secrétaire Général..... R. POULLAIN.

Imprimé en France. — Imprimerie JOUVE, 12, rue de Tournon, PARIS (6e)
Dépôt légal : 4e trimestre 1966